

# Berechnung von Laufzeit- und Amplitudenverteilung durch simultane Lösung der Eikonal- und Transportgleichung mittels einer adaptierten Fast-Marching-Methode

Robert NEUBECK<sup>1,2</sup>, Stefan BUSKE<sup>1</sup>, Lars SCHUBERT<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Insitut für Geophysik und Geoinformatik, TU Bergakademie Freiberg, Freiberg

<sup>2</sup> Fraunhofer-Institut für Keramische Technologien und Systeme IKTS, Dresden

Kontakt E-Mail: robert.neubeck@ikts.fraunhofer.de

**Kurzfassung.** Ein effizientes und stabiles Verfahren zur Berechnung von Laufzeit- und Amplitudenverteilung von Ultraschallwellen für komplexe dreidimensionale Strukturen mit räumlich variierenden Materialparametern ist ein in vielen Bereichen der zerstörungsfreien Prüfung mittels elastischer Wellen häufig anzutreffendes Problem. Besonders im Bereich der permanenten Zustandsüberwachung mit geführten Wellen oder durch Schallemissionsverfahren sind die Einflüsse von Geometrie sowie Materialparameter maßgebliche Einflussfaktoren auf alle Phasen der Überwachung. Von der Planung des Sensornetzwerkes, über die Messungen und die Auswertung können alle Phasen von der Kenntnis der Laufzeit- und Amplitudenverteilung profitieren bzw. sind einige Auswerteverfahren erst damit anwendbar.

Im vorliegenden Beitrag wird die Anpassung der Fast-Marching-Methode vorgestellt, sodass neben der klassischen Berechnung der Laufzeiten eine simultane Berechnung der Amplitudenverteilung möglich ist. Dazu wird neben der Eikonalgleichung die Transportgleichung mittels Finiten-Differenzen-Schema mit zusätzlicher Upwind-Forderung gelöst. Beide Gleichungen sind ein Resultat der Hochfrequenzapproximation der Wellengleichung und stellen eine Eulersche Betrachtungsweise des Problems dar. Dadurch werden Lösungen an vorher definierten Beobachtungspunkten berechnet. In der Praxis hat dies Vorteile gegenüber klassischen Verfahren wie Raytracing, welche eine Langrangesche Betrachtungsweise darstellen, da z.B. zusätzliche Interpolationen entfallen.

Das Verfahren wird anhand einiger Beispiele aus der Zustandsüberwachung mit geführten Wellen und ihrer Anwendung erläutert. Außerdem wird dargelegt, wann das Verfahren die optimale Komplexität der Fast-Marching-Methode von  $\mathcal{O}(n \log n)$  beibehält.

## 1. Motivation

Die Überwachung von Strukturen mittels geführter elastischer Wellen, welche durch ein Netzwerk aus permanent installierten piezokeramischen Sensoren angeregt werden, wird im deutschen Sprachraum, orientiert an [1, 2], aus historischen Gründen oft als Acousto Ultrasonics (AU) bezeichnet und ist beispielsweise in [3, 4] beschrieben. Das Verfahren basiert in den meisten Fällen auf der Annahme der linearen Wellenausbreitung, wodurch das gemessene Wellenfeld eines Referenzzustandes von einem aktuellen Zustand subtrahiert wird und sich dadurch das Anomaliefeld bzw. Streufeld ergibt, welches die Wechselwirkung des Schadens beschreibt. Dabei verhält sich der Defekt als Quelle des Streufeldes, der je nach ursprünglicher Anregung und zu Grunde liegender Struktur bestimmte Abstrahlcharakteristiken aufweist. Das Streufeld wird vom Sensornetzwerk punktuell über den Messzeitraum indirekt über die Differenzbildung erfasst, falls zusätzliche Einflussfaktoren wie die Änderung von Umweltparametern kompensiert [5, 6] oder gar vermieden werden können.

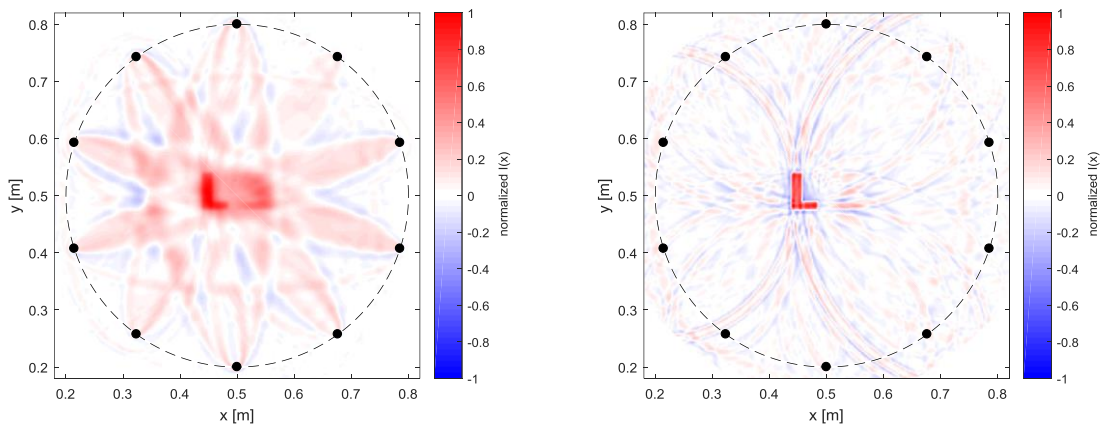


Abbildung 1: Rekonstruktion eines L-förmigen Beispielschadens (5% Geschwindigkeitskontrast) mittels prestack Kirchhoff-Migration, Links ohne und Rechts mit Korrektur der geometrischen Dämpfung. Die Aktoren sind als schwarze Punkte markiert, während die gestrichelte Linie den gedachten durch die Aktoren diskretisierten Rand des Migrationsintergrals darstellt. Durch die Korrektur erfahren die Reflektierten Anteile eine höhere Wichtung wodurch die Verstärkten hochfrequenten Anteile im Bild den Kontrast erhöhen

Mithilfe von möglichst genauen a priori Informationen über die Geometrie und das Geschwindigkeitsmodell des betrachteten Wellenfeldes kann durch die virtuelle Rückpropagierung des Streufeldes zu seinem Entstehungsort und –Zeitpunkt, der Schadensort, dessen Abstrahlcharakteristik bzw. Form und im günstigsten Fall seine Intensität rekonstruiert werden. Übernommen aus dem ursprünglichen Fachgebiet der Geophysik wird dieser modellbasierte Lösungsansatz der virtuellen Rückpropagierung als Migration bezeichnet. Dabei wird in eine Vielzahl von Migrationsoperatoren unterschieden, welche die Rückpropagierung entweder über die angesetzte Wellengleichung mittels numerischer Lösungsverfahren direkt oder indirekt als umformuliertes Randwertproblem [7, 8] durchgeführt. Dabei werden in den meisten Fällen lediglich Ersteinsätze oder bestimmte Phasen betrachtet, wodurch sich das Problem der Form:

$$I(\mathbf{x}) = \oint_S \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{RX}) u(\mathbf{x}_{RX}, T_{TX} + T_{RX}) d\mathbf{x}_{RX},$$

ergibt. Dabei ist  $I(\mathbf{x}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  das rückpropagierte Streufeld des Ersteinsatzes, zur Zwei-Wege-Laufzeit  $T_{TX} + T_{RX}$ , am Ort  $\mathbf{x} \in \Omega$ , des Beobachtungsgebietes  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  mit dem stückweise geschlossenen differenzierbaren Rand  $S = \partial\Omega$ . Für die Migration werden dabei

alle am Empfängerort  $\mathbf{x}_{RX} \in S$  gemessenen Differenzenwellenfelder<sup>1</sup>  $u(\mathbf{x}_{RX}, T): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  verwendet. Zusätzlich werden die Ersteinsatzlaufzeiten von Empfängerposition zum Bildpunkt  $T_{RX}(\mathbf{x}_{RX}, \mathbf{x}): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  und von der Senderposition zum Bildpunkt  $T_{TX}(\mathbf{x}_{TX}, \mathbf{x}): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sowie der Wichtungsfaktor  $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{RX}): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  benötigt. Letzterer korrigiert die geometrische Dämpfung der das Wellenfeld unterlag und ermöglicht somit die korrekte Einbeziehung von Sensor-Empfänger-Laufwegen auf unterschiedlichen Skalen. Dieser Umstand ist besonders für die Verteilten Sensornetzwerke in der Strukturüberwachung wichtig, da die Relationen der Abstände einzelner Sensoren häufig zwischen Zentimetern und mehreren Metern variiert, ein Beispiel wie groß der Einfluss auf die Qualität der Bildgebung sein kann ist aus Abbildung 1 ersichtlich. Der Faktor wird im Fall der skalaren Wellengleichung aus der Amplitudenverteilung der Ersteinsätze berechnet. Dieses Migrationsverfahren wird in der geophysikalischen Literatur als Kirchhoff-Migration mit True-Amplitude Wichtung bezeichnet [7]. In der ZfP hat sich hingegen der Begriff Synthetic Focusing Aperture Technique (SAFT) durchgesetzt [9]. Im Allgemeinen wird diese Prozedur für alle Transmitter einzeln durchgeführt und anschließend alle zurückmigrierten Ergebnisse aufsummiert, wodurch es zu einem Informationszuwachs und somit einer höheren Genauigkeit kommt. Dieser inzwischen seit einigen Jahren in der Geophysik als quasi Standard etablierter Ansatz wird als prestack Migration bezeichnet [Stolt Buch] und entspricht dem in der ZfP vergleichsweise neuem Ansatz der Total Focusing Method (TFM) [10].

Sowohl Amplitudenverteilung als auch Laufzeit sind Funktionen der Geometrie und des Geschwindigkeitsmodelles der zu Untersuchenden Struktur und ihre Berechnung ist, wie in den folgenden Kapiteln dargelegt, meist eine komplexe Aufgabe. Sowohl in der ZfP als auch in der Geophysik haben sich aufgrund der rechentechnischen Effizienz dafür hauptsächlich diverse Raytracing Ansätze durchgesetzt. Diese besitzen den wesentlichen Nachteil, dass sie zwar prinzipiell dieselbe Fragestellung lösen, jedoch ihre Lösung der Langrangesche Betrachtungsweise entsprechen. Das heißt, die Lösung liegt nur für bestimmte Laufpfade vor und nicht für alle Punkte im Beobachtungsgebiet, wie es die ursprüngliche Aufgabenstellung für die Bildgebung erfordert.

## 2. Hochfrequenzapproximation

Die Ausbreitung der geführten Wellen in plattenähnlichen Strukturen, sprich hauptsächlich Lambwellen und Scherwellen, sei im folgendem als einzelner Wellenmode angenommen, dessen Ausbreitung Näherungsweise durch die homogene skalare Wellengleichung der Form:

$$\left[ \frac{1}{c(\mathbf{x})^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right] u(\mathbf{x}, t) = 0,$$

mit der inhomogenen Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c(\mathbf{x}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  beschrieben wird. Gilt zusätzlich, dass die Skalenlänge der Geschwindigkeitsinhomogenität kleiner als die Charakteristische Wellenlänge  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  ist:

$$\frac{|\nabla c(\mathbf{x})|}{c(\mathbf{x})} \ll \lambda,$$

---

<sup>1</sup> Angemerkt sei, dass in der Originalformulierung (bspw. in [Schleicher]) neben der Auslenkung auch die zeitliche Ableitung des Wellenfeldes einbezogen wird. Je nach Relation von Zwei-Wege-Laufweg zu Geschwindigkeitsmodell dominiert meist ein Term und der andere wird vernachlässigt. In der Geophysik dominiert aufgrund der großen Distanzen die zeitliche Ableitung, während in ZfP- oder Zustandsüberwachungsanwendungen das Wellenfeld dominiert. Übersichtshalber wurde auf diese Unterscheidung verzichtet.

so kann der Ersteinsatz näherungsweise durch die zeitlich harmonischer Hochfrequenzapproximation der Form:

$$u(\mathbf{x}, t) \approx A(\mathbf{x})e^{i\omega(t-T(\mathbf{x}))},$$

beschrieben werden. Dabei ist  $\omega \in \mathbb{R}^+$  die Kreisfrequenz,  $T(\mathbf{x})$  wiederum die Laufzeit des Ersteinsatzes und  $A(\mathbf{x}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dessen Amplitudenverteilung. Durch das einsetzen der Hochfrequenzapproximation in die Wellengleichung folgt, wie beispielsweise in [11] oder [12] erläutert, die Eikonalgleichung der Form:

$$\|\nabla T(\mathbf{x})\| = \frac{1}{c(\mathbf{x})^2}$$

und die Transportgleichung:

$$\nabla T(\mathbf{x}) \cdot \nabla A(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} A(\mathbf{x}) \nabla^2 T(\mathbf{x}) = 0.$$

Die Lösung der Eikonalgleichung liefert die Laufzeit am Ort  $\mathbf{x}$ . Unter Kenntnis dessen, sowie dem dazugehörigen Laufzeitgradienten und der zweiten räumlichen Ableitung kann die Transportgleichung gelöst werden. Das wesentliche Problem bei beiden Gleichungen sind mögliche physikalische Unstetigkeiten der Lösungen, welche bei klassischen numerischen Lösungsverfahren wie beispielsweise Finiten-Differenzen zu numerischen Oszillationen führen [12]. Weiterhin wird im Fall der Transportgleichung die Ableitung der Ordnung zwei der Laufzeit benötigt. Daher muss, wie bspw. [12] beschreibt, die Eikonalgleichung mit kubischer Konvergenzordnung gelöst werden, damit die Lösung der Transportgleichung eine lineare Konvergenzordnung erreicht.

### 3. Adaptierte Fast-Marching-Methode

Eine bereits populäre Möglichkeit zur direkten Lösung der Eikonalgleichung ist die sogenannte Fast-Marching-Methode (FMM). Diese wurde ursprünglich von [13] für gitterbasierte Diskretisierungen vorgeschlagen, wobei fast zeitgleich und unabhängig von [13] eine nahezu äquivalente Lösung von [14] im Kontext der Kontrolltheorie veröffentlicht wurde. Die Methode wurde in [15] auf Simplexbasierte Diskretisierungen und in [16, 17] auf Anisotropie angewendet. Prinzipiell basiert die Methode auf einer Finiten-Differenzen-Formulierung mit zusätzlicher Upwind bzw. Gudonov-Bedingung, wodurch sich die Lösung bedingungslos stabil verhält, weswegen es unabhängig der Gitterfeinheit zu keinen numerischen Oszillationen kommt.

In den folgenden Unterkapiteln wird die Methode von [15] aufgegriffen und erweitert, um quasi parallel die Transportgleichung zu lösen.

#### 3.1. Lösung der Eikonalgleichung

Die Fast-Marching-Methode basiert im Wesentlichen auf der Zerlegung des Gebietes in die Mengen *Known*, *Narrow* und *Far*. Für alle Punkte in *Known* ist die Laufzeit bekannt, sie entsprechen somit der Randwerte bzw. bekannten Anfangswerte. Die Punkte der Menge *Narrow* sind direkte Nachbarn der bekannten Punkte, welche über die Kanten der Simplexbasierten Diskretisierung miteinander verbunden sind. Im Falle der hier angesetzten Dreieckselemente müssen alle Nachbarn für mindestens ein Simplexelement bekannt sein (*Known*), indem sich der zu betrachtende Punkt befindet, damit er der Menge *Narrow* zugeordnet werden kann. Die Punkte der Menge *Far* sind alle die, die keinen direkten als *Known* markierten Nachbarn besitzen. In jedem Berechnungsschritt werden alle Punkte der Menge *Narrow* einzeln betrachtet. Wie in [15] detailliert beschrieben werden dabei die Laufzeiten anhand der Bekannten Nachbarn Neuberechnet und übernommen, falls dieser Wert kleiner als der aus bisherigen Berechnung ist. Anschließend wird der Punkt mit dem

kleinsten Laufzeitwert der gesamten Menge Narrow auf Known gesetzt und gegebenenfalls die Beziehung von Narrow und Far in der Nachbarschaft aktualisiert. Der Prozess wird mit den restlichen Punkten solange wiederholt, bis alle Punkte bekannt sind.

Wie Abbildung 2 ersichtlich führen die diagonalen Ausbreitungsrichtungen, bei denen in der Diskretisierung besonders häufig stumpfe Winkel vorkommen zu höheren Approximationsfehlern der Laufzeitkurvenberechnung. Dieser Umstand wurde bereits in [15] beschrieben und durch das sogenannte section splitting verhindert. Dabei werden zwei oder mehr benachbarte Dreiecke mit einem stumpfen Winkeln virtuell erneut geteilt und als ein alternativ mögliches Simplexelement betrachtet, ohne die bisherige Diskretisierung zu ändern. Nach der Argumentation von [15] erhöht dies nicht die optimale Komplexität, jedoch kann die effektive Rechenzeit eines Einzelschrittes durchaus zunehmen.

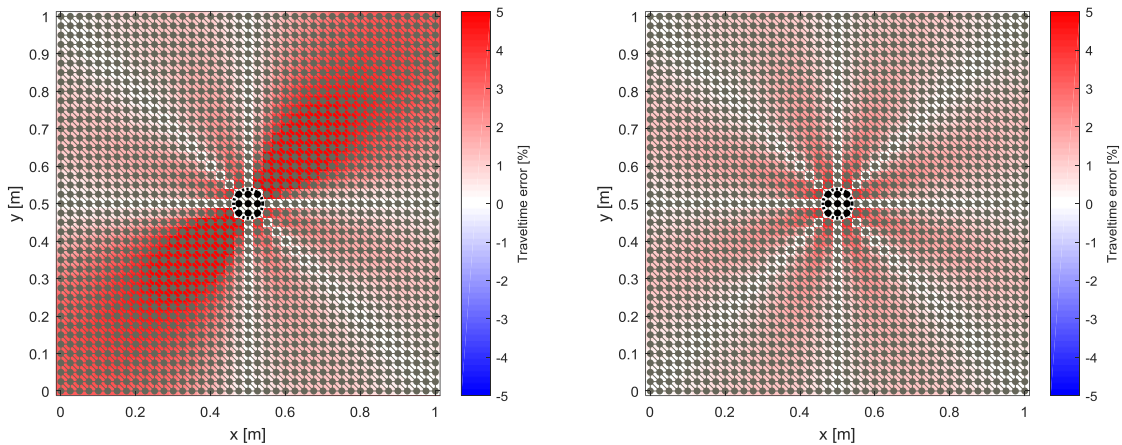


Abbildung 2: Relativer Fehler der Laufzeitkurvenberechnung mit einem Differenzenschema erster Ordnung für eine Punktquelle bei (0.5,0.5), sowie deren direkten Nachbar als Startwerten und einer Diskretisierungsschrittwerte von  $dx = 2.5\text{cm}$ . Links das Ergebnis ohne section splitting und rechts mit section splitting.

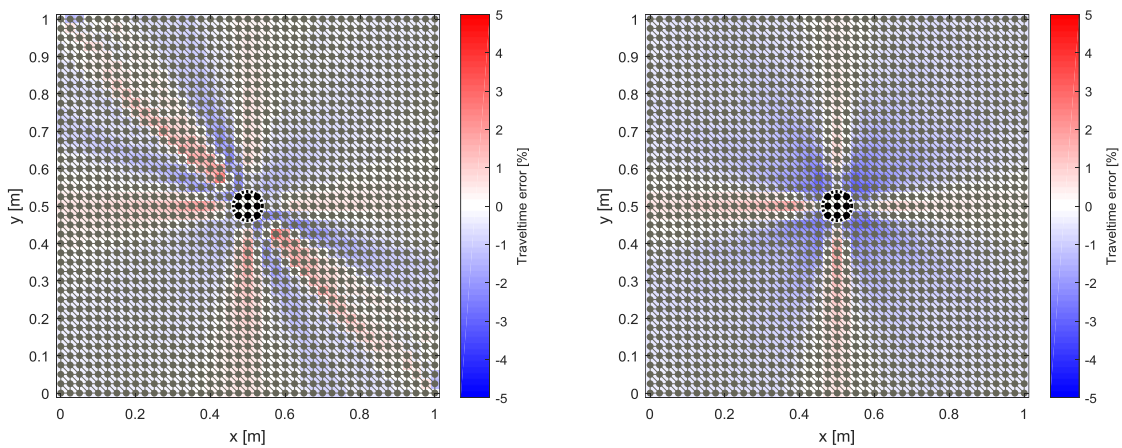


Abbildung 3: Relativer Fehler der Laufzeitkurvenberechnung mit einem Differenzenschema zweiter Ordnung für eine Punktquelle bei (0.5,0.5), sowie deren direkten Nachbar als Startwerten und einer Diskretisierungsschrittwerte von  $dx = 2.5\text{cm}$ . Links das Ergebnis ohne section splitting und rechts mit section splitting.

In [15] wird ebenfalls eine Variante zur Erhöhung der Konvergenzordnung vorgestellt, indem neben der Laufzeit die Gradienten der Laufzeit mitberechnet werden. Somit kann, falls an den Startpunkten die Gradienten mit ausreichender Genauigkeit bekannt sind, ein Differenzenschema zweiter Ordnung auch auf ein unstrukturiertes Gitter angewendet werden. Das Problem ist dabei die Aktualisierungsvorschrift der Gradienten. Diese wird in [15] zwar kurz erwähnt und eine genaue Erläuterung in einer potentiellen späteren Veröffentlichung in Aussicht gestellt, jedoch konnte eine solche nach bisheriger Literaturrecherche nicht gefunden werden. Wird nämlich der Gradient äquivalent zur Laufzeit anhand seiner bekannten Nachbarn eines einzelnen Simplexelementes aktualisiert,

so kommt es zu numerischen Oszillationen für die Elemente bei denen die negative Gradientenrichtung außerhalb des Simplexelementes zeigt. Diese können stabilisiert werden, indem für jede Gradientenberechnung alle bekannten Punkte innerhalb eines bestimmten Radius einbezogen werden. Im Falle der Beispieldiskretisierung aus Abbildung 3 wurde der Betrag der längsten Kante ( $\sqrt{2} \cdot dx$ ) verwendet. Dieses Vorgehen ist vergleichbar mit dem ordered upwind Verfahren aus [16, 17]. Wie in Abbildung 3 ersichtlich, kommt es trotz Stabilisierung zu negativen relativen Fehlern. Folglich bleibt ein gewisser Anteil an numerischen Oszillationen, welche die Eigenschaft der Bedingungslosen Stabilität auflösen.

### 3.2. Lösung der Transportgleichung

Der Lösungsschritt für die Transportgleichung ist orientiert an der Arbeit von [12] und basiert auf einer Umformulierung als hyperbolische Erhaltungsgleichung mit einer charakteristischen Ausbreitungsrichtung. Letzteres folgt implizit aus jedem Fast-Marching Rechenschritt und den beteiligten Simplexelemente. Neben den für einen zu aktualisierenden Punkt bereits berechneten Laufzeitwertes und Gradienten, wird zusätzlich noch die zweite Ableitung der Laufzeit benötigt. Diese wird wie der Gradient aus den bekannten benachbarten Punkten (Known) innerhalb des vergebenen Radius ermittelt. Dabei sollte die Amplitude nur auf einem Gitter mit größerer Diskretisierungsschrittweite als das der Laufzeit berechnet werden, um die lineare Konvergenzordnung zu gewährleisten. In derzeitigen Implementierungen steht dieser Punkt des Multigrid-Ansatzes noch aus.

## 4. Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Publikation wurde eine Erweiterung der Fast-Marching-Methode auf eine höhere Konvergenzordnung für unstrukturierte Simplexbasierte Diskretisierungen vorgeschlagen. Weiterhin wurde ein Schema zur quasi simultanen Berechnung der Amplitudenverteilung hinzugefügt. Zum Zeitpunkt der Abgabe des Manuskriptes standen noch die Genauigkeitsuntersuchungen der Amplitudenberechnungen aus.

## Referenzen

- [1] J. C. Duke, Hrsg., *Acousto-Ultrasonics: Theory and Application*, Boston, MA and s.l.: Springer US, 1988.
- [2] A. Vary, „The Acousto-Ultrasonic Approach,“ in *Acousto-Ultrasonics*, J. C. Duke, Hrsg., Boston, MA and s.l., Springer US, 1988, pp. 1-21.
- [3] DGZfP, *Structural Testing with guided waves*, 2014.
- [4] DGZfP, *Strukturprüfung mit geführten Wellen als Sonderform des Ultraschalls*, 2014.
- [5] B. Weihnacht, T. Klesse, R. Neubeck und L. Schubert, „Monitoring of hot pipes at the power plant Neurath using guided waves,“ 2013.
- [6] L. Schubert, *Zustandsüberwachung an Faserverbundwerkstoffen mit geführten Wellen*, Bd. 3, Dresden, : TUDpress, 2012.
- [7] J. Schleicher, M. Tygel und P. Hubral, „3-D true--amplitude finite--offset migration,“ *GEOPHYSICS*, Bd. 58, pp. 1112-1126, 1993.
- [8] M. S. Zdanov, *Geophysical inverse theory and regularization problems*, Transferred to digital print Hrsg., Bd. 36, Amsterdam u.a.: Elsevier, 2006.

- [9] M. Schickert, M. Krause und W. Müller, „Ultrasonic Imaging of Concrete Elements Using Reconstruction by Synthetic Aperture Focusing Technique,“ *Journal of Materials in Civil Engineering*, Bd. 15, pp. 235-246, 2003.
- [10] C. Holmes, B. W. Drinkwater und P. D. Wilcox, „Post-processing of the full matrix of ultrasonic transmit--receive array data for non-destructive evaluation,“ *NDT & E International*, Bd. 38, pp. 701-711, 2005.
- [11] V. Červený, *Seismic ray theory*, Cambridge, : Cambridge University Press, 2001.
- [12] S. Buske, *Finite Differenzen-Lösung der strahlenseismischen Transportgleichung: Zugl.: Frankfurt (Main), Univ., Diss., 2000*, Osnabrück: Der Andere Verl., 2000.
- [13] J. A. Sethian, „A fast marching level set method for monotonically advancing fronts,“ *Proceedings of the National Academy of Sciences*, Bd. 93, pp. 1591-1595, 1996.
- [14] J. N. Tsitsiklis, „Efficient algorithms for globally optimal trajectories,“ *IEEE Transactions on Automatic Control*, Bd. 40, pp. 1528-1538, 1995.
- [15] J. A. Sethian und A. Vladimirsky, „Fast methods for the Eikonal and related Hamilton-Jacobi equations on unstructured meshes,“ *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, Bd. 97, pp. 5699-5703, 2000.
- [16] J. A. Sethian und A. Vladimirsky, „Ordered upwind methods for static Hamilton-Jacobi equations,“ *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, Bd. 98, pp. 11069-11074, 2001.
- [17] J. A. Sethian und A. Vladimirsky, „Ordered Upwind Methods for Static Hamilton--Jacobi Equations: Theory and Algorithms,“ *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Bd. 41, pp. 325-363, 2003.