

ASW

Berufsakademie Saarland
University of cooperative education



Fraunhofer

IZFP

Bachelorthesis im Studiengang Maschinenbau

**Abschätzung der Ist-Abmessungen eines Körpers anhand
seiner zerstörungsfrei bestimmten Eigenfrequenzen mit
multipler Regressionsanalyse zur Qualitätssicherung in
einer Serienfertigung**

Verfasser: Matthias David Heinrich
Betreuerin: PD Dr.-Ing. Ute Rabe
Gutachterin: Prof. Dr. rer. nat. Barbara Grabowski
Abgabe bis spätestens: 02. August 2013

Kurzfassung und Abstract

Kurzfassung

In dieser Arbeit wird untersucht, inwiefern die exakte Geometrie eines zufällig aus einer Grundgesamtheit ausgewählten Teils ohne makroskopische Defekte anhand endlich vieler seiner Eigenfrequenzen im Anschluss an eine Kalibrierung mit vergleichbaren Teilen abgeschätzt werden kann. Die Ausführungen dazu erfolgen für Pleuelstangen, die sich auf Grund von zufälligen Einflüssen hinsichtlich ihrer exakten Abmessungen und dadurch bedingt auch hinsichtlich ihrer Eigenfrequenzen unterscheiden. Mit multipler linearer Regressionsanalyse werden unter Berücksichtigung der tatsächlichen Abmessungen und der Eigenfrequenzen zahlreicher Pleuelstangen geeignete Zusammenhänge ermittelt, die zur Abschätzung der Abmessungen anhand der Eigenfrequenzen dienen. Die ermittelten Zusammenhänge werden an weiteren (bisher nicht betrachteten) Teilen überprüft. Die Untersuchungen erfolgen anhand virtueller Teile, deren zufallsbehaftete Abmessungen mit unabhängigen Zufallszahlen beschrieben und die davon abhängigen Eigenfrequenzen numerisch mit der Finite-Elemente-Methode ermittelt werden.

Abstract

This thesis examines how the exact geometry of a randomly from a population selected specimen without macroscopic defects can be estimated after a calibration with many similar specimens. The study is done for connection rods which differ in regard to their exact dimensions and therefore also in regard to their natural frequencies. Multiple linear regression is used to determine correlations between the exact dimensions and the natural frequencies of many specimens. These correlations can be used to estimate the exact dimensions of a specimen on the basis of its natural frequencies. All determined correlations are validated with the help of other (so far not used) specimen. All analyses are carried out for virtual specimen. Their random dimensions are described with random numbers; their natural frequencies are calculated using the finite element method.

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	V
Abbildungsverzeichnis	VII
Tabellenverzeichnis	XI
1 Einleitung	1
1.1 Einführung	1
1.2 Akustische Resonanzanalyse	1
1.2.1 Eingliederung und Normung der akustischen Resonanzanalyse	1
1.2.2 Grundlagen und Prinzip der akustischen Resonanzanalyse	2
1.2.3 Vorteile der akustischen Resonanzanalyse	6
1.3 Problemstellung, Motivation und Zielsetzung	6
1.4 Aufbau der Arbeit	9
2 Stand der Technik	11
2.1 Einfluss von Geometrievariationen	11
2.2 Variationen und Defekte	13
3 Grundlagen der Regressionsanalyse	15
3.1 Modellgleichung und Schätzung	15
3.2 Bestimmtheitsmaß R^2	19
3.3 Schrittweise Regressionsanalyse	20
3.4 Modellannahmen	22
4 Lösungsansatz und Zielstellung	23
5 Versuchsmaterial und Untersuchungen	29
5.1 Virtuelle Versuchsteile	29
5.2 Verwendete Software	32

5.3	Versuchsprogramm	33
5.3.1	Generierung von Daten	33
5.3.2	Kalibrierung	37
5.3.3	Validierung.....	40
6	Ergebnisse	45
6.1	Geometrieparameter d_1	46
6.2	Geometrieparameter d_2	48
6.3	Geometrieparameter d_3	50
6.4	Geometrieparameter d_4	52
6.5	Geometrieparameter h_1	54
6.6	Geometrieparameter h_2	56
6.7	Geometrieparameter l	58
6.8	Geometrieparameter b	60
6.9	Zusammenfassende Ergebnisbeschreibung.....	62
7	Diskussion	67
7.1	Diskussion der Ergebnisse	67
7.2	Diskussion des Regressionsmodells	70
7.3	Anwendung des Verfahrens in der Praxis	73
8	Zusammenfassung	79
	Literaturverzeichnis	81
	Anhang	87
A.1	Nenngeometrie und Nennmaterial der Pleuelstange	87
A.2	Eigenfrequenzen und Variationen	88
A.3	Eigenfrequenzen und Eigenmoden	93
A.4	Weitere mathematische Grundlagen.....	104
A.5	Konkrete Schätzwerte der Modellparameter	115
A.6	Weitere Ergebnisse	123

Abbildungsverzeichnis

Abb. 1.1:	Darstellung eines Prüfsystems bzw. eines Prüfaufbaus zur impulsangeregten akustischen Resonanzanalyse.....	4
Abb. 1.2:	Darstellung von Zeitsignalen und Frequenzspektren aus der akustischen Resonanzanalyse von drei realen Teilen	5
Abb. 4.1:	Grobe schematische Darstellung der geplanten Vorgehensweise	24
Abb. 4.2:	Detaillierte schematische Darstellung der geplanten Vorgehensweise....	26
Abb. 5.1:	Schematische Darstellung der prinzipiellen Geometrie der i -ten Pleuelstange sowie ihrer tatsächlichen Abmessungen bzgl. der acht unabhängigen Geometrieparameter	30
Abb. 5.2:	Darstellung der mit elementaren Körpern und booleschen Operatoren in <i>COMSOL Multiphysics</i> aufgebauten Geometrie sowie der entsprechenden Vernetzung einer Pleuelstange.....	35
Abb. 5.3:	Schematische Darstellung der Kalibrier- bzw. Validierdaten	36
Abb. 6.1:	Darstellung von Diagrammen zur Charakterisierung der Differenzen sowie des linearen Zusammenhangs zwischen den tatsächlichen Abmessungen bzgl. des Geometrieparameters d_1 und den Schätzwerten ...	47
Abb. 6.2:	Darstellung von Diagrammen zur Charakterisierung der Differenzen sowie des linearen Zusammenhangs zwischen den tatsächlichen Abmessungen bzgl. des Geometrieparameters d_2 und den Schätzwerten ...	49
Abb. 6.3:	Darstellung von Diagrammen zur Charakterisierung der Differenzen sowie des linearen Zusammenhangs zwischen den tatsächlichen Abmessungen bzgl. des Geometrieparameters d_3 und den Schätzwerten ...	51
Abb. 6.4:	Darstellung von Diagrammen zur Charakterisierung der Differenzen sowie des linearen Zusammenhangs zwischen den tatsächlichen Abmessungen bzgl. des Geometrieparameters d_4 und den Schätzwerten ...	53

Abb. 6.5:	Darstellung von Diagrammen zur Charakterisierung der Differenzen sowie des linearen Zusammenhangs zwischen den tatsächlichen Abmessungen bzgl. des Geometrieparameters h_1 und den Schätzwerten ...	55
Abb. 6.6:	Darstellung von Diagrammen zur Charakterisierung der Differenzen sowie des linearen Zusammenhangs zwischen den tatsächlichen Abmessungen bzgl. des Geometrieparameters h_2 und den Schätzwerten ...	57
Abb. 6.7:	Darstellung von Diagrammen zur Charakterisierung der Differenzen sowie des linearen Zusammenhangs zwischen den tatsächlichen Abmessungen bzgl. des Geometrieparameters l und den Schätzwerten	59
Abb. 6.8:	Darstellung von Diagrammen zur Charakterisierung der Differenzen sowie des linearen Zusammenhangs zwischen den tatsächlichen Abmessungen bzgl. des Geometrieparameters b und den Schätzwerten	61
Abb. 7.1:	Darstellung aller acht tatsächlichen Abmessungen zweier Pleuelstangen im Vergleich zu den entsprechenden Abmessungen der $n_{cal} = 600$ Kalibrierteile	69
Abb. A.1:	Schematische Darstellung einer Pleuelstange mit Nennmaßen bzgl. der acht Geometrieparameter	87
Abb. A.2:	Darstellung der prozentualen Verschiebungen der Eigenfrequenzen infolge von Material- bzw. Geometriev Variationen am Beispiel der Pleuelstange	92
Abb. A.3:	Darstellung der 1. Eigenmode ($f_1 = 1,7853$ kHz) einer Pleuelstange mit Nennmaßen und Nennmaterialeigenschaften	94
Abb. A.4:	Darstellung der 2. Eigenmode ($f_2 = 3,7288$ kHz) einer Pleuelstange mit Nennmaßen und Nennmaterialeigenschaften	94
Abb. A.5:	Darstellung der 3. Eigenmode ($f_3 = 3,7447$ kHz) einer Pleuelstange mit Nennmaßen und Nennmaterialeigenschaften	95
Abb. A.6:	Darstellung der 4. Eigenmode ($f_4 = 5,1673$ kHz) einer Pleuelstange mit Nennmaßen und Nennmaterialeigenschaften	95
Abb. A.7:	Darstellung der 5. Eigenmode ($f_5 = 9,0248$ kHz) einer Pleuelstange mit Nennmaßen und Nennmaterialeigenschaften	96
Abb. A.8:	Darstellung der 6. Eigenmode ($f_6 = 10,4465$ kHz) einer Pleuelstange mit Nennmaßen und Nennmaterialeigenschaften	96

Abb. A.9:	Darstellung der 7. Eigenmode ($f_7 = 12,1275$ kHz) einer Pleuelstange mit Nennmaßen und Nennmaterialeigenschaften	97
Abb. A.10:	Darstellung der 8. Eigenmode ($f_8 = 14,1884$ kHz) einer Pleuelstange mit Nennmaßen und Nennmaterialeigenschaften	97
Abb. A.11:	Darstellung der 9. Eigenmode ($f_9 = 16,8021$ kHz) einer Pleuelstange mit Nennmaßen und Nennmaterialeigenschaften	98
Abb. A.12:	Darstellung der 10. Eigenmode ($f_{10} = 17,2743$ kHz) einer Pleuelstange mit Nennmaßen und Nennmaterialeigenschaften	98
Abb. A.13:	Darstellung der 11. Eigenmode ($f_{11} = 19,0068$ kHz) einer Pleuelstange mit Nennmaßen und Nennmaterialeigenschaften	99
Abb. A.14:	Darstellung der 12. Eigenmode ($f_{12} = 20,7812$ kHz) einer Pleuelstange mit Nennmaßen und Nennmaterialeigenschaften	99
Abb. A.15:	Darstellung der 13. Eigenmode ($f_{13} = 21,4672$ kHz) einer Pleuelstange mit Nennmaßen und Nennmaterialeigenschaften	100
Abb. A.16:	Darstellung der 14. Eigenmode ($f_{14} = 22,7802$ kHz) einer Pleuelstange mit Nennmaßen und Nennmaterialeigenschaften	100
Abb. A.17:	Darstellung der 15. Eigenmode ($f_{15} = 26,8632$ kHz) einer Pleuelstange mit Nennmaßen und Nennmaterialeigenschaften	101
Abb. A.18:	Darstellung der 16. Eigenmode ($f_{16} = 27,4087$ kHz) einer Pleuelstange mit Nennmaßen und Nennmaterialeigenschaften	101
Abb. A.19:	Darstellung der 17. Eigenmode ($f_{17} = 28,7952$ kHz) einer Pleuelstange mit Nennmaßen und Nennmaterialeigenschaften	102
Abb. A.20:	Darstellung der Dichtefunktion und der Verteilungsfunktion einer normalverteilten Zufallsgröße für verschiedene Parameterwerte	107
Abb. A.21:	Darstellung der Dichtefunktion und der Verteilungsfunktion einer F -verteilten Zufallsgröße für verschiedene Freiheitsgrade	110

Tabellenverzeichnis

Tab. 5.1:	Auflistung aller acht Geometrieparameter sowie der tatsächlichen Abmessungen und Zufallsgrößen (inkl. Erwartungswerte und Standardabweichungen) einer i -ten Pleuelstange	31
Tab. 5.2:	Auflistung der bei der Validierung genutzten Kennwerte zur Charakterisierung der Differenzen sowie des linearen Zusammenhangs zwischen den tatsächlichen Abmessungen sowie den Schätzwerten	42
Tab. 6.1:	Auflistung von Kennwerten zur Charakterisierung der Differenzen sowie des linearen Zusammenhangs zwischen den tatsächlichen Abmessungen bzgl. des Geometrieparameters d_1 und den Schätzwerten	46
Tab. 6.2:	Auflistung von Kennwerten zur Charakterisierung der Differenzen sowie des linearen Zusammenhangs zwischen den tatsächlichen Abmessungen bzgl. des Geometrieparameters d_2 und den Schätzwerten	48
Tab. 6.3:	Auflistung von Kennwerten zur Charakterisierung der Differenzen sowie des linearen Zusammenhangs zwischen den tatsächlichen Abmessungen bzgl. des Geometrieparameters d_3 und den Schätzwerten	50
Tab. 6.4:	Auflistung von Kennwerten zur Charakterisierung der Differenzen sowie des linearen Zusammenhangs zwischen den tatsächlichen Abmessungen bzgl. des Geometrieparameters d_4 und den Schätzwerten	52
Tab. 6.5:	Auflistung von Kennwerten zur Charakterisierung der Differenzen sowie des linearen Zusammenhangs zwischen den tatsächlichen Abmessungen bzgl. des Geometrieparameters h_1 und den Schätzwerten	54
Tab. 6.6:	Auflistung von Kennwerten zur Charakterisierung der Differenzen sowie des linearen Zusammenhangs zwischen den tatsächlichen Abmessungen bzgl. des Geometrieparameters h_2 und den Schätzwerten	56
Tab. 6.7:	Auflistung von Kennwerten zur Charakterisierung der Differenzen sowie des linearen Zusammenhangs zwischen den tatsächlichen Abmessungen bzgl. des Geometrieparameters l und den Schätzwerten	58

Tab. 6.8:	Auflistung von Kennwerten zur Charakterisierung der Differenzen sowie des linearen Zusammenhangs zwischen den tatsächlichen Abmessungen bzgl. des Geometrieparameters b und den Schätzwerten	60
Tab. A.1:	Auflistung der bei den Eigenfrequenzberechnungen zum Einfluss von Materialvariationen genutzten Materialkennwerte	90
Tab. A.2:	Auflistung der bei den Eigenfrequenzberechnungen zum Einfluss von Geometrievariationen genutzten Abmessungen	91
Tab. A.3:	Auflistung der ersten $m = 17$ Eigenfrequenzen einer Pleuelstange mit Nennmaßen und Nennmaterialeigenschaften	93
Tab. A.4:	Auflistung von Kennwerten zur Charakterisierung der tatsächlichen Abmessungen aller $n = 800$ Pleuelstangen	103
Tab. A.5:	Auflistung von Kennwerten zur Charakterisierung der Wertebereiche der ersten $m = 17$ Eigenfrequenzen aller $n = 800$ Pleuelstangen	103
Tab. A.6:	Schätzwerte der in der Regressionsfunktion für den Geometrieparameter d_1 berücksichtigten Modellparameter	115
Tab. A.7:	Schätzwerte der in der Regressionsfunktion für den Geometrieparameter d_2 berücksichtigten Modellparameter	116
Tab. A.8:	Schätzwerte der in der Regressionsfunktion für den Geometrieparameter d_3 berücksichtigten Modellparameter	117
Tab. A.9:	Schätzwerte der in der Regressionsfunktion für den Geometrieparameter d_4 berücksichtigten Modellparameter	118
Tab. A.10:	Schätzwerte der in der Regressionsfunktion für den Geometrieparameter h_1 berücksichtigten Modellparameter	119
Tab. A.11:	Schätzwerte der in der Regressionsfunktion für den Geometrieparameter h_2 berücksichtigten Modellparameter	120
Tab. A.12:	Schätzwerte der in der Regressionsfunktion für den Geometrieparameter l berücksichtigten Modellparameter	121
Tab. A.13:	Schätzwerte der in der Regressionsfunktion für den Geometrieparameter b berücksichtigten Modellparameter	122
Tab. A.14:	Ergänzende Auflistung von Kennwerten zur Charakterisierung der Differenzen sowie des linearen Zusammenhangs zwischen den tatsächlichen Abmessungen aller virtuellen Teile bzgl. des Geometrieparameters d_1 und den Schätzwerten	123

Tab. A.15: Ergänzende Auflistung von Kennwerten zur Charakterisierung der Differenzen sowie des linearen Zusammenhangs zwischen den tatsächlichen Abmessungen aller virtuellen Teile bzgl. des Geometrieparameters d_2 und den Schätzwerten	124
Tab. A.16: Ergänzende Auflistung von Kennwerten zur Charakterisierung der Differenzen sowie des linearen Zusammenhangs zwischen den tatsächlichen Abmessungen aller virtuellen Teile bzgl. des Geometrieparameters d_3 und den Schätzwerten	124
Tab. A.17: Ergänzende Auflistung von Kennwerten zur Charakterisierung der Differenzen sowie des linearen Zusammenhangs zwischen den tatsächlichen Abmessungen aller virtuellen Teile bzgl. des Geometrieparameters d_4 und den Schätzwerten	124
Tab. A.18: Ergänzende Auflistung von Kennwerten zur Charakterisierung der Differenzen sowie des linearen Zusammenhangs zwischen den tatsächlichen Abmessungen aller virtuellen Teile bzgl. des Geometrieparameters h_1 und den Schätzwerten	125
Tab. A.19: Ergänzende Auflistung von Kennwerten zur Charakterisierung der Differenzen sowie des linearen Zusammenhangs zwischen den tatsächlichen Abmessungen aller virtuellen Teile bzgl. des Geometrieparameters h_2 und den Schätzwerten	125
Tab. A.20: Ergänzende Auflistung von Kennwerten zur Charakterisierung der Differenzen sowie des linearen Zusammenhangs zwischen den tatsächlichen Abmessungen aller virtuellen Teile bzgl. des Geometrieparameters l und den Schätzwerten	125
Tab. A.21: Ergänzende Auflistung von Kennwerten zur Charakterisierung der Differenzen sowie des linearen Zusammenhangs zwischen den tatsächlichen Abmessungen aller virtuellen Teile bzgl. des Geometrieparameters b und den Schätzwerten	126

1 Einleitung

1.1 Einführung

Bei der Entwicklung und Herstellung moderner Produkte spielt die Einhaltung strenger Qualitätsanforderungen eine immer wichtigere Rolle, u. a. auch in der Automobilindustrie, dem bedeutendsten und umsatzstärksten Industriezweig Deutschlands [Gehr 2007, Statistisches Bundesamt 2012]. Ein Grund hierfür ist sicherlich, dass die fortgeschrittene Globalisierung zunehmend stabilere, immer weniger Ausschuss produzierende und kostengünstigere Prozesse erfordert, um sich gegen die wachsende internationale Konkurrenz zu behaupten, die Qualität der eigenen Produkte kontinuierlich zu steigern und den technischen Vorsprung gegenüber neuen Wettbewerbern zu wahren bzw. auszubauen. So sind z. B. die Automobilhersteller bestrebt, beschädigte Komponenten in der Fertigung frühzeitig zu erkennen und auszusortieren, um später erforderliche, kostenintensive Nacharbeiten oder Defekte beim Endkunden zu vermeiden. Dabei nehmen die großen Konzerne auch ihre Zulieferer in die Pflicht, die (z. B. um Vertragsstrafen oder den Verlust zukünftiger Aufträge zu vermeiden) ebenfalls ein gesteigertes Interesse an einer geeigneten, wirtschaftlichen Qualitätsüberwachung zur Erkennung fehlerhafter Bauteile haben.

Um die Qualitätsanforderungen zu erfüllen und defekte Teile frühzeitig zu erkennen, eignen sich akustische zerstörungsfreie Prüfverfahren wie die *akustische Resonanzanalyse*, auf die in Kapitel 1.2 eingegangen wird. Daran anschließend werden in Kapitel 1.3 – ausgehend von den Nachteilen des Verfahrens – die Problemstellung, die Motivation und das Ziel der Arbeit abgeleitet. Zuletzt zeigt Kapitel 1.4 die weitere Gliederung der Arbeit.

1.2 Akustische Resonanzanalyse

1.2.1 Eingliederung und Normung der akustischen Resonanzanalyse

Die oftmals auch als *Klangprüfung* bezeichnete *akustische Resonanzanalyse* ist ein zerstörungsfreies Prüfverfahren, das „zur Erkennung von Inhomogenitäten und Fehlstellen

(Risse, Gefügefehler, Einschlüsse, Abbrüche und Verbindungsgüte) in Prüfgegenständen“ [Hertlin 2003] genutzt wird. Nach [DGZfP 2009] wird das Verfahren allgemein *akustisches Resonanzverfahren* bzw. *Acoustic Resonance Testing (ART)* genannt. Darüber hinaus nutzen einige Autoren bzw. Hersteller kommerzieller Prüfsysteme weitere synonyme Bezeichnungen wie z. B. *akustische Resonanzprüfung, Klanganalyse, (Acoustic) Resonant Inspection, Resonance Inspection* oder *Resonant Acoustic Method*.

Die ART ist bisher nicht durch internationale Normen abgedeckt [Hertlin 2009], jedoch existieren seit einigen Jahren Richtlinien zum Einsatz des Verfahrens in der Praxis [DGZfP 2009, ASTM 2008]. Lediglich spezielle Anwendungen, die auf dem Prinzip der ART basieren, werden in Normen bzw. weiteren Richtlinien behandelt. Beispielhaft wird dazu auf die Bestimmung von Materialeigenschaften anhand des Schwingungsverhaltens impulsangeregter, geometrisch einfacher Proben [DIN 2007, ASTM 2009] sowie auf Eigenfrequenzmessungen an Bremsscheiben [VDA 2009a,b] verwiesen.

Die ART stellt bezüglich ihres physikalischen Prüfprinzips neben der Sichtprüfung eines der ältesten zerstörungsfreien Prüfverfahren dar [Richter 1999, Hertlin 2003]. Sie ist ein volumenorientiertes Prüfverfahren und wird den akustischen Verfahren zugeordnet [Hertlin 2003, DGZfP 2009]. Darüber hinaus ist die ART als integrales Prüfverfahren zu verstehen; d. h. sie ermöglicht zwar eine schnelle und zuverlässige 100 %-Prüfung, erlaubt aber i. d. R. keine Lokalisierung oder Klassifizierung von Defekten [Hertlin 2003, DGZfP 2009, Lai 2011]. Industriell findet die ART – im Sinne eines zerstörungsfreien Prüfverfahrens zur Erkennung von Ungängen – z. B. in der Serienfertigung metallischer oder keramischer Komponenten Verwendung. In der Literatur sind zahlreiche konkrete Anwendungsbeispiele des Verfahrens genannt [Hertlin 2003, DGZfP 2009].

Gegenüber der klassischen Modalanalyse, deren Aufgabe in der Charakterisierung oder Voraussage des Schwingungsverhaltens verschiedener Strukturen besteht [Kokavecz 2010], zielt die ART meist auf eine qualifizierende Prüfaussage („Gutteil“ oder „Schlechtteil“) für Serienteile ab. Da jedoch die Modalanalyse und die ART auf denselben physikalischen Grundlagen beruhen, sind die beiden Verfahren nicht vollständig voneinander zu trennen; die Grenzen zwischen den Verfahren sind fließend.

1.2.2 Grundlagen und Prinzip der akustischen Resonanzanalyse

Jeder Körper schwingt nach einer geeigneten (z. B. impulsartigen) Anregung in Abhängigkeit der Geometrie, der Materialeigenschaften und der äußeren Randbedingungen bei

gewissen diskreten Frequenzen, seinen sogenannten *Eigenfrequenzen*, mit besonders großen Amplituden. Zu jeder der Eigenfrequenzen gehört jeweils eine charakteristische Schwingungsform, die auch als *Eigenschwingungsform*, *Eigenmode* oder *Mode* bezeichnet wird [Möser 2010]. Die Entstehung von Eigenfrequenzen bzw. Eigenmoden lässt sich anschaulich durch eine Reflexion einer von außen angeregten und fortschreitenden elastischen Welle an den freien Rändern eines Körpers erklären. Die reflektierte Welle läuft letztendlich mit gleicher Phase an den Ausgangspunkt zurück, überlagert sich dort mit der ursprünglichen Welle und führt dadurch zu einer stehenden Welle [Lindner 2006, Möser 2010]. Durch Anregung der umgebenden Luft durch einen (z. B. mit seinen Eigenfrequenzen) schwingenden Körper, breiten sich von dort elastische Wellen gleicher Frequenzen aus. Diese sind vom menschlichen Gehör als Schall wahrnehmbar, sofern sie eine ausreichende Amplitude aufweisen und im hörbaren Bereich von ca. 16 Hz bis ca. 16 kHz liegen. Schwingungen und Wellen in Festkörpern werden auch als *Körperschall*, elastische Wellen in der Luft als *Luftschall* bezeichnet [Möser 2009, 2010].

Neben den bereits erwähnten Parametern Geometrie, Material und Randbedingungen beeinflussen jedoch auch makroskopische Defekte wie Risse, Poren oder Lunker die akustischen und elastischen Eigenschaften und damit die Eigenmoden und Eigenfrequenzen eines Körpers. Dies macht sich die akustische Resonanzanalyse als zerstörungsfreies Prüfverfahren zu Nutze. Die ART ermittelt modale Parameter wie Eigenfrequenzen (z. B. bezüglich ihrer Lage oder ihres Vorhandenseins) oder Dämpfungsgrößen eines Prüfobjekts experimentell als Prüfgrößen. Diese werden anschließend unter Berücksichtigung der für ein fehlerfreies Teil zu erwartenden Werte beurteilt [Hertlin 2003, DGZfP 2009].

Die Durchführung einer akustischen Resonanzanalyse erfordert zunächst eine äußere Anregung des Prüfobjekts, sodass dieses mit einer oder mehreren Eigenfrequenzen gleichzeitig schwingt. Diese kann dabei stoßartig (z. B. mit einem Hammerschlag) erfolgen. Dies hat eine breitbandige Anregung zur Folge. Alternativ ist eine kontinuierliche Erregung (z. B. durch Piezoaktoren) möglich, bei der je nach ungefährender Lage der Eigenfrequenzen diese bewusst nacheinander angesteuert werden. Die zeitlich abhängige Schwingungsantwort des Prüfobjekts, die auch als *Zeitsignal* bezeichnet wird, kann wiederum direkt mittels Laservibrometer bzw. Beschleunigungsaufnehmern oder indirekt über den abgestrahlten Luftschall mit einem Mikrofon erfasst werden. Bei der anschließenden Signalverarbeitung, die neben der Digitalisierung des aufgezeichneten analogen Signals weitere Schritte wie z. B. eine Filterung oder eine Fensterung umfassen kann, wird das Zeitsignal meist mit Hilfe einer *diskreten Fourier-Transformation* von der Zeit- in die Frequenzdo-

mäne überführt. Als Ergebnis dessen resultiert ein Spektrum (auch als *Frequenz-* oder *Amplitudenspektrum* bezeichnet), in welchem die Amplitude gegenüber der Frequenz aufgetragen ist. Die angeregten Eigenfrequenzen des Prüfobjekts sind im Spektrum als sogenannte *Peaks* erkennbar. Letztendlich werden Kenngrößen aus der Schwingungsantwort des Teils als Prüfgrößen bestimmt, die sowohl aus der Zeitdomäne (z. B. Abklingkoeffizient des Zeitsignals) als auch aus der Frequenzdomäne (z. B. Lage der Eigenfrequenzen) oder einer Zeit-Frequenz-Darstellung abgeleitet werden können. Auf Basis der Kenngrößen wird ein Teil schließlich klassifiziert. Im einfachsten Fall wird beispielsweise analysiert, ob die für ein Prüfobjekt ermittelten Werte innerhalb bestimmter, zuvor im Rahmen einer Kalibrierung festgelegter Toleranzgrenzen liegen. Alternativ können komplexere Klassifikationsverfahren zum Einsatz kommen [Hertlin 2003, DGZfP 2009]. Abbildung 1.1 zeigt ein Prüfsystem zur impulsangeregten akustischen Resonanzanalyse, wobei bis zu zwei Mikrofone gleichzeitig genutzt werden können.

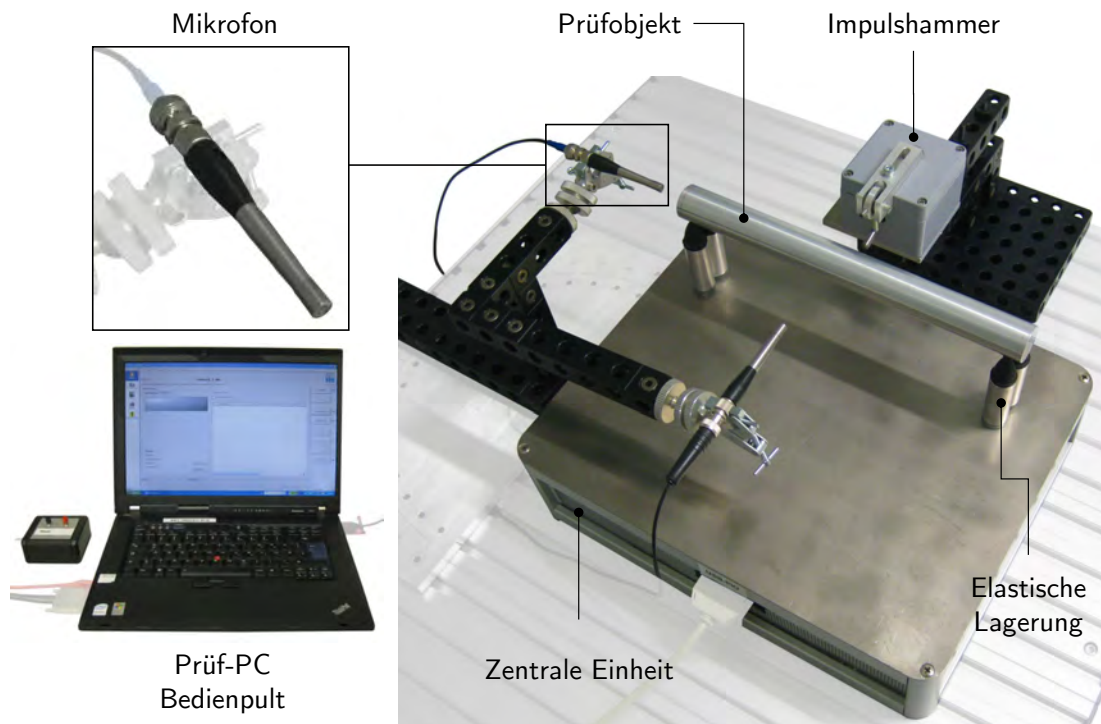


Abbildung 1.1: Darstellung eines Prüfsystems bzw. eines Prüfaufbaus zur impulsangeregten akustischen Resonanzanalyse. Zur Anregung eines elastisch gelagerten Prüfobjekts stehen ein elektrischer Impulshammer und zur Erfassung der Schwingungsantwort zwei identische Mikrofone zur Verfügung. Die Auslösung des Impulshammers erfolgt mit Hilfe eines Bedienpults. Eine zentrale Einheit dient der Signalkonditionierung und Spannungsversorgung. Mit einem Prüf-PC und einer Prüfsoftware können die aufgezeichneten Signale schließlich analysiert und bewertet werden. Bei dem gezeigten System handelt es sich um ein kommerzielles Prüfsystem (Typ: *SonicTC*) der Firma *RTE Akustik + Prüftechnik GmbH*, die Mikrofone (Typ: *MI17*) stammen von der Firma *AVM Mess- und Prüfgeräte für Akustik und Vibration*.

Ergänzend zu den vorherigen Ausführungen stellt Abbildung 1.2 Zeitsignale und Frequenzspektren (in logarithmischer Darstellung) aus der akustischen Resonanzanalyse von drei realen Teilen dar. Für die Messungen wurden die in Abbildung 1.1 gezeigten Komponenten genutzt. Weitere Details sind der Abbildungsbeschriftung zu entnehmen.

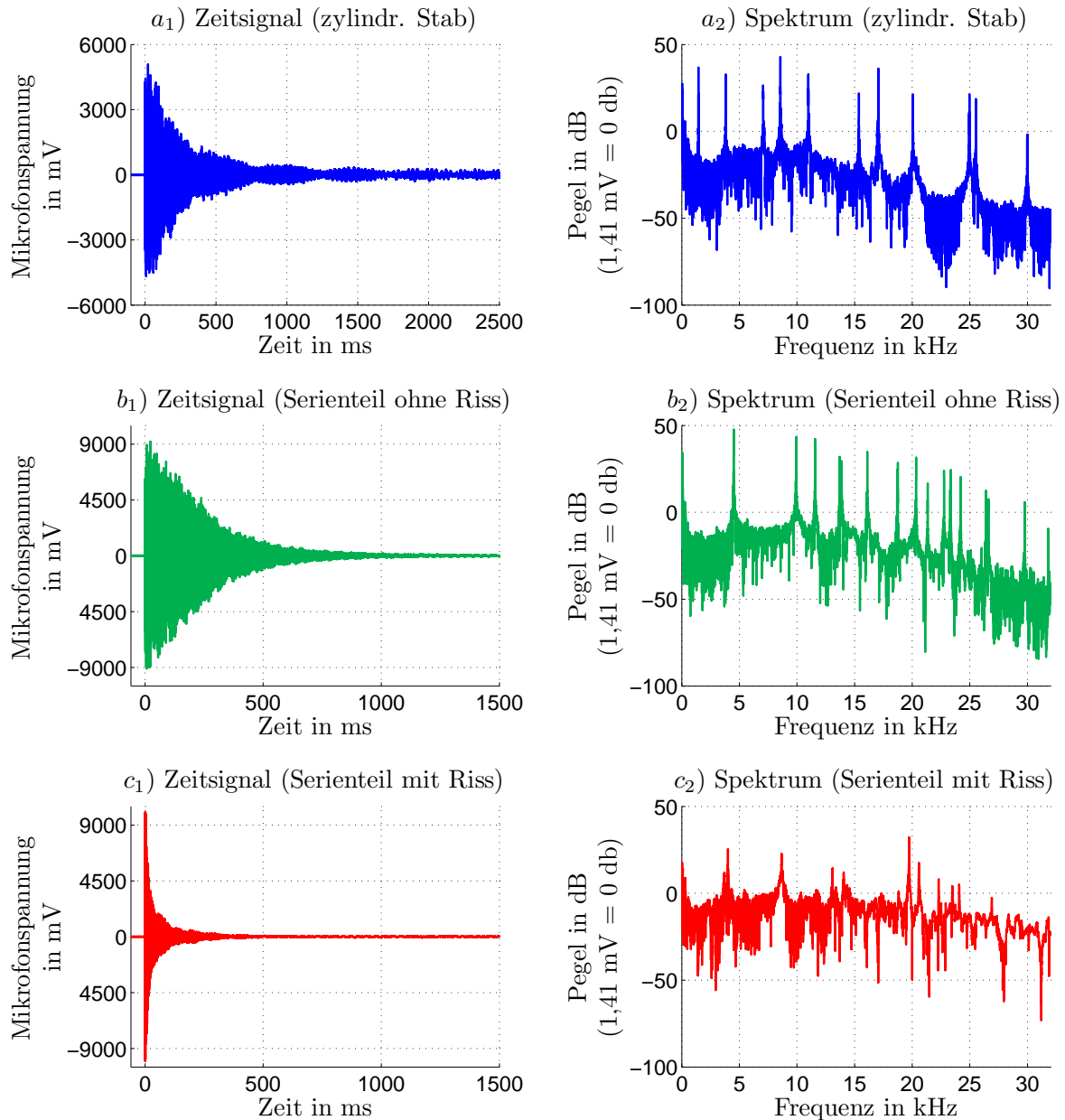


Abbildung 1.2: Darstellung von Zeitsignalen und Frequenzspektren aus der akustischen Resonanzanalyse von drei realen Teilen. Die angeregten Eigenfrequenzen der Teile sind jeweils als Peaks in den Spektren zu erkennen. In den Diagrammen a_1 und a_2 sind ein Zeitsignal und ein Spektrum eines zylindrischen Stabes gezeigt. Bis ca. 30 kHz sind 11 Peaks zu erkennen. In den Diagrammen b_1 und c_1 sind Zeitsignale zwei nominell gleicher Serienteile dargestellt. Die Diagramme b_2 und c_2 zeigen die entsprechenden Spektren. Die erkennbaren Unterschiede in den Diagrammen b_1 und c_1 bzw. b_2 und c_2 (z.B. Abklingverhalten des Zeitsignals, Positionen und Amplituden der Peaks im Spektrum) sind auf einen Riss in einem der Teile zurückzuführen.

1.2.3 Vorteile der akustischen Resonanzanalyse

Die akustische Resonanzanalyse bietet einige Vorteile gegenüber konkurrierenden Volumenprüfverfahren: Da die gesamte Struktur eines Bauteils ursächlich für dessen Eigenfrequenzen ist, erfolgt stets eine integrale Prüfung. Das heißt ein zu prüfendes Teil wird global und nicht lokal hinsichtlich Unregelmäßigkeiten analysiert. Dies wiederum hat z. B. zur Folge, dass keine wiederholten Prüfungen an verschiedenen Stellen eines Teils notwendig sind (wie z. B. bei der Ultraschallprüfung). Deshalb ist die ART ein äußerst schnelles Prüfverfahren, das Taktzeiten von wenigen Sekunden ermöglicht. Die Verwendung moderner Computersysteme ermöglicht darüber hinaus eine reproduzierbare und objektive Bestimmung empfindlicher und hochaufgelöster Prüfmerkmale. Weiterhin werden weder Verbrauchsmaterialien oder umweltbelastende Stoffe benötigt, noch sind besondere arbeitssicherheitstechnische Vorkehrungen zu treffen. Nicht zuletzt ist zu erwähnen, dass die ART wegen dieser Vorteile, ihrer guten Automatisierbarkeit sowie der relativ einfachen und günstigen Prüfhardware ein preiswertes Verfahren zur Qualitätsüberwachung in einer Serienfertigung darstellt [Hertlin 2003, DGZfP 2009, Lai 2011].

1.3 Problemstellung, Motivation und Zielsetzung

Der Einsatz der akustischen Resonanzanalyse (ART, siehe Kapitel 1.2) in einer Serienfertigung ist trotz vieler Vorteile auch mit einigen Nachteilen verbunden, die dessen Verwendung in der Praxis einschränken. Zum einen erfordert jede neue Anwendung eine überwiegend empirisch durchgeführte Kalibrierung, auf deren Basis defekte Bauteile automatisiert – mit Hilfe mathematischer Modelle und statistischer Auswertelgorithmen – erkannt werden können. Eine solche Kalibrierung ist zeitaufwendig und umfasst das Anlernen eines Prüfsystems mit einer sehr großen Anzahl an Teilen. Diese sollten wiederum alle relevanten Bauteilvariationen und -defekte repräsentieren, sodass die Grundgesamtheit der produzierten Teile möglichst vollständig widergespiegelt wird und die später geprüften Teile korrekt klassifiziert werden können. Zum anderen ist die Klassifizierung und Lokalisierung eines Defekts in einem ausgeschleusten Bauteil wegen des integralen Prüfprinzips i. d. R. nicht möglich, sodass eine Prüfentscheidung und deren Korrektheit nicht unmittelbar analysiert werden können [Hertlin 2003, DGZfP 2009, Lai 2011, 2012]. Auf Grund von Störeinflüssen können nämlich ein als defekt eingestuftes Teil fehlerfrei und ein laut Prüfergebnis fehlerfreies Teil beschädigt sein. Dies wird im Folgenden erläutert.

Zu solchen Störeinflüssen, die sowohl die empirische Kalibrierung erst erfordern als auch ein Prüfergebnis verfälschen können, zählen zufällige Geometrie- und Materialschwankungen. So unterscheiden sich nominell gleiche Teile wegen fertigungstechnologisch bedingter, zufällig auftretender Geometrie- und Materialvariationen bezüglich ihrer Eigenfrequenzen. Dies hat bei einer Prüfung auf strukturelle Defekte oder Inhomogenitäten zur Folge, dass die Eigenfrequenzen eines Bauteils nicht ohne Weiteres mit denen eines Referenzteils verglichen werden können. Denn ein Fehler ist nicht zwangsläufig ursächlich für Unterschiede zwischen den Eigenfrequenzen verschiedener Teile. Dieses Problem lässt sich mit Hilfe eines einfachen Gedankenexperiments veranschaulichen. Im hypothetischen Fall, dass zwischen allen produzierten Serienteilen keinerlei geometrische oder materialspezifische Unterschiede bestünden und auch weitere äußere Störeinflüsse (z. B. Umgebungsbedingungen, Messunsicherheiten etc.) vernachlässigt werden könnten, wären sämtliche (fehlerfreien) Teile durch exakt dieselben Eigenfrequenzen gekennzeichnet. Da selbst kleinste Fehler bereits das Eigenschwingungsverhalten eines Körpers beeinflussen, hätte dies zur Folge, dass solche Defekte mit ART erkannt werden könnten. In der Realität können jedoch die durch makroskopische Defekte hervorgerufenen Eigenfrequenzänderungen durch den Einfluss zufälliger Geometrie- und Materialabweichungen überlagert werden. Defekte Teile werden daher unter Umständen nicht zuverlässig als fehlerhaft eingestuft.

Um defekte Teile mit ART verlässlich erkennen zu können, ist ein umfassendes Verständnis bzw. eine Kompensation des Geometrie- und Materialeinflusses auf die Eigenfrequenzen erforderlich. Ein vollständiges Arbeitsprogramm dazu kann jedoch nicht in dieser Thesis bewältigt werden. Daher wurde zunächst anhand analytischer Formeln und numerischer Eigenfrequenzberechnungen analysiert, welcher Störeinfluss (zufällige Geometrievariationen oder zufällige Materialvariationen) zu einer komplexeren und daher ungünstigeren Beeinflussung der Eigenfrequenzen führt. Es wurde jeweils separat betrachtet, inwiefern die Eigenfrequenzen nominell gleicher Teile (aus einem homogen-isotropen Material) infolge von Variationen des Elastizitätsmoduls oder der Dichte, Variationen der Poissonzahl bzw. Geometrievariationen streuen. Dabei wurde angenommen, dass nur ein Materialkennwert bzw. nur die Geometrie variiert und alle anderen Eigenschaften konstant sind. Die vollständigen Untersuchungen und deren Ergebnisse sind in Anhang A.2 beschrieben. Die wichtigsten Erkenntnisse werden im Folgenden zusammengefasst und anschließend knapp bewertet. Die entsprechenden Bewertungen beruhen auf der Vereinfachung, dass weder verschiedene Variationen gleichzeitig auftreten noch Materialinhomogenitäten oder anisotropes Werkstoffverhalten vorliegen.

- **Einfluss des Elastizitätsmoduls oder der Dichte auf die Eigenfrequenzen:** Variationen der Dichte bzw. des Elastizitätsmoduls wirken sich jeweils gleichermaßen auf alle Eigenfrequenzen aus. Konkret bedingen solche Materialvariationen die Änderungen aller Eigenfrequenzen eines Teils um einen identischen Faktor. Alle Eigenfrequenzen werden also um denselben Prozentwert verschoben. Da die Eigenfrequenzen umgekehrt proportional zur Wurzel der Dichte bzw. proportional zur Wurzel des Elastizitätsmoduls sind, bewirken Variationen dieser Materialparameter verhältnismäßig geringe Eigenfrequenzverschiebungen. Da die Eigenfrequenzen vom Quotienten aus Elastizitätsmodul und Dichte abhängen, können sich gleichzeitige und gleichgerichtete Variationen dieser Materialkennwerte gegenseitig eliminieren.
- **Einfluss der Poissonzahl auf die Eigenfrequenzen:** Variationen der Poissonzahl wirken sich in unterschiedlichem Maße auf die verschiedenen Eigenfrequenzen eines Teils aus. Sogar verhältnismäßig große Variationen der Poissonzahl verursachen im Vergleich dazu jedoch nur geringe Verschiebungen der Eigenfrequenzen.
- **Einfluss der geometrischen Abmessungen auf die Eigenfrequenzen:** Variationen der geometrischen Abmessungen können zu deutlichen Verschiebungen der Eigenfrequenzen führen. Dies gilt insbesondere dann, wenn Variationen von mehreren geometrischen Abmessungen gleichzeitig auftreten. Für jede Kombination von geringfügig unterschiedlichen Abmessungen resultiert ein charakteristisches Muster der entsprechenden Frequenzverschiebungen.

Auf Basis der Auflistung ist ersichtlich, dass variierende geometrische Abmessungen die Eigenfrequenzen nominell gleicher Teile aus einem isotropen und homogenen Material weitaus ungünstiger beeinflussen können, als aufgrund schwankender Materialkennwerte zu erwarten ist. Denn durch Variationen des Elastizitätsmoduls und der Dichte verursachte Eigenfrequenzverschiebungen können (bei ansonsten konstanten Eigenschaften) auf Grund ihrer zuvor beschriebenen Charakteristik leicht erkannt und kompensiert werden. Durch Variationen der Poissonzahl bedingte Eigenfrequenzverschiebungen sind ggf. sogar zu vernachlässigen. Geometrievariationen hingegen können zu deutlich größeren und sehr unterschiedlichen Eigenfrequenzverschiebungen führen. Diese können darüber hinaus (außer für sehr einfache, analytisch beschreibbare Körper) nicht auf einfache Art und Weise erkannt und kompensiert werden. Daher können insbesondere geometrische Variationen die durch Defekte bedingten Eigenfrequenzänderungen überlagern und so den Einsatz der

ART erschweren. Diese Arbeit fokussiert folglich ausschließlich auf zufällige Geometrievariationen.

Die Problemstellung der Arbeit besteht darin, dass in der Praxis vor allem zufällige Geometrievariationen die durch makroskopische Defekte bedingten Eigenfrequenzänderungen überlagern und so den Einsatz der akustischen Resonanzanalyse erschweren können. Daraus ergibt sich unmittelbar die Motivation, die Fähigkeiten des Verfahrens dahingehend zu verbessern. Die Zielsetzung der Arbeit umfasst die Entwicklung und exemplarische Überprüfung eines Lösungsansatzes, mit dem der Einfluss zufälliger Geometrievariationen möglicherweise erkannt und kompensiert werden kann.

1.4 Aufbau der Arbeit

Kapitel 1.1 und Kapitel 1.2 umfassen eine knappe Einführung in das Thema und eine Beschreibung der akustischen Resonanzanalyse als zerstörungsfreies Prüfverfahren. Ausgehend von den Nachteilen dieses Verfahrens wurden in Kapitel 1.3 die Problemstellung, die Motivation und das wesentliche Ziel der Arbeit abgeleitet.

Kapitel 2 gibt einen Überblick über den Stand der Technik zur Problemstellung bzw. Zielsetzung. Daraufhin sind in Kapitel 3 die für diese Arbeit relevanten mathematischen Grundlagen zur multiplen linearen Regressionsanalyse dargestellt. In Kapitel 4 wird ausgehend von einer prinzipiellen Idee ein möglicher Lösungsansatz ausgearbeitet und beschrieben; die Zielsetzung der Arbeit wird konkretisiert.

Kapitel 5 umfasst eine Beschreibung des Versuchsmaterials und der experimentellen Methoden, die zur Überprüfung des Lösungsansatzes dienen. In diesem Rahmen werden zunächst die betrachteten Teile (Kapitel 5.1) definiert sowie die für die Untersuchungen genutzte Software genannt (Kapitel 5.2). Im Anschluss wird detailliert auf das geplante Versuchsprogramm eingegangen (Kapitel 5.3).

In Kapitel 6 werden schließlich die Ergebnisse aus den Untersuchungen dargestellt. In Kapitel 7 werden diese zunächst in Form einer Diskussion aufgegriffen (Kapitel 7.1). Darauf aufbauend ist der Lösungsansatz dieser Arbeit unter mathematischen Gesichtspunkten (Kapitel 7.2) sowie hinsichtlich der Umsetzung in der Praxis bewertet (Kapitel 7.3). Kapitel 8 fasst die wichtigsten Erkenntnisse der Arbeit zusammen.

2 Stand der Technik

2.1 Einfluss von Geometrievariationen

Der erste Teil des Stands der Technik befasst sich mit der Geometrieabhängigkeit von Eigenfrequenzen.

In einer Veröffentlichung von *Lauwagie et al.* wurden 18 gemessene Eigenfrequenzen (bis 1,5 kHz) eines gegossenen Gehäuses mit entsprechenden Eigenfrequenzen aus numerischen FEM-Eigenfrequenzberechnungen verglichen. Die Berechnungen erfolgten anhand von zwei Modellen leicht unterschiedlicher Geometrien mit jeweils homogen-isotropen Materialeigenschaften. Zum einen diente als Geometrie das CAD-Modell des Gehäuses. Zum anderen wurde mit Hilfe optischer Scantechnik die reale Geometrie des Gehäuses (Genauigkeit ca. 0,2 mm) digitalisiert. Nach ersten Berechnungen unter Berücksichtigung beider Geometrien sowie angenommenen Materialeigenschaften zeigten sich jeweils große Abweichungen zwischen gemessenen und berechneten Eigenfrequenzen. Konkret wurden bei den Berechnungen Frequenzen ermittelt, die gegenüber den gemessenen Werten zwischen ca. $-7,8\%$ und ca. $-3,6\%$ (Modell mit CAD-Geometrie) bzw. zwischen ca. $-8,9\%$ und ca. $-8,4\%$ (Modell mit realer Geometrie) abwichen. Zur optimalen Anpassung von gemessenen und berechneten Eigenfrequenzen wurde ein sogenanntes *Model Updating* durchgeführt. Sinngemäß kann dieser Begriff als *Modellanpassung* übersetzt werden, fachlich verbirgt sich dahinter die Angleichung von Simulationsergebnissen an die Realität durch eine Variation von verschiedenen Simulationsparametern. Das genutzte Model Updating bestand aus zwei Schritten. Zunächst wurden für die numerischen Berechnungen die Dichte des Gehäuses aus seiner realen Masse sowie dem Volumen der jeweiligen Modellgeometrie (getrennt für die CAD-Geometrie und die reale Geometrie) bestimmt. Anschließend wurde für jedes der beiden Modelle der Elastizitätsmodul global mit Software der *FEMtools* so gewählt, dass die Abweichungen zwischen gemessenen und numerisch berechneten Eigenfrequenzen minimiert werden. Beim abschließenden Vergleich der Eigenfrequenzen zeigte sich, dass die numerischen Berechnungen unter Berücksichtigung der CAD-Geometrie zu deutlichen Abweichungen zu den gemessenen Eigenfrequenzen zwischen ca. $-1,72\%$ und

ca. 3,64 % führten. Der betragsmäßige Mittelwert der Abweichungen betrug ca. 1,04 %. Dahingegen wichen die unter Berücksichtigung der realen Geometrie errechneten Eigenfrequenzen nur zwischen ca. $-0,29\%$ und ca. $0,24\%$ von den gemessenen Eigenfrequenzen ab, im betragsmäßigen Mittel unterschieden sich die Eigenfrequenzen um lediglich ca. $0,14\%$. Außerdem zeigte sich, dass die unter Berücksichtigung der realen Geometrie numerisch bestimmten Modenformen deutlich besser mit den gemessenen Modenformen übereinstimmten als die unter Berücksichtigung der CAD-Geometrie berechneten Modenformen [Lauwagie 2010].

In einer Veröffentlichung von *Lai et al.* wurden gemessene Eigenfrequenzen (bis 40 kHz) eines gegossenen Achsschenkels mit entsprechenden Eigenfrequenzen aus einer numerischen FEM-Eigenfrequenzberechnung verglichen. Zunächst wurde die Geometrie des betrachteten Teils mittels Computertomographie (Auflösung 0,5 mm) ermittelt und digitalisiert, weiterhin wurden die Materialeigenschaften des Teils unter Annahme eines homogenisotropen Materialmodells mittels *Resonant Ultrasound Spectroscopy (RUS)* ermittelt. Die kommerzielle Software *ABAQUS* wurde anschließend genutzt, um mit diesen Eingangsdaten die Eigenfrequenzen des Achsschenkels numerisch zu berechnen. Die Eigenfrequenzen wurden zunächst durch lineare Verschiebung um jeweils $-0,35\%$ korrigiert, um den Einfluss der Diskretisierung zu kompensieren. Beim Vergleich der berechneten und der gemessenen Eigenfrequenzen konnte eine sehr gute Übereinstimmung für die Eigenfrequenzen bis 25 kHz erkannt werden, die maximale Abweichung betrug 87,5 Hz. Oberhalb davon wurden einige größere Abweichungen zwischen berechneten Eigenfrequenzen und den gemessenen Eigenfrequenzen mit kleinen Amplituden erkannt. Beim Vergleich der Eigenfrequenzen oberhalb von 34 kHz wurden mehr berechnete Eigenfrequenzen als gemessene Eigenfrequenzen beobachtet. Dies führten die Autoren auf Einflüsse der Bauteillagerung und der Bauteil Anregung zurück [Lai 2011].

Weiterhin wird an dieser Stelle auf einen Fortschrittsbericht des Jahres 2008 zum Forschungsvorhaben *Enhanced Resonance Inspection for Light Metal Castings* eingegangen (die Arbeiten zur zuvor genannten Veröffentlichung [Lai 2011] basieren auf diesem Forschungsvorhaben). In diesem Fortschrittsbericht wurden gemessene Eigenfrequenzen des bereits erwähnten gegossenen Achsschenkels sowie einer Pleuelstange mit entsprechenden Eigenfrequenzen aus FEM-Eigenfrequenzberechnungen verglichen. Die Eigenfrequenzen der Pleuelstange wurden zunächst unter Berücksichtigung der CAD-Geometrie sowie später unter Berücksichtigung der Realgeometrie berechnet und mit gemessenen Eigenfrequenzen verglichen. Dabei wurde erkannt, dass die Verwendung der Realgeometrie ge-

genüber der CAD-Geometrie zu einer deutlich besseren Übereinstimmung berechneter und gemessener Eigenfrequenzen führte [NDE701 2009]. Für eine Voraussage der Eigenfrequenzen ist also die Realgeometrie erforderlich, eine von der Realgeometrie deutlich abweichende CAD-Geometrie ist oftmals nicht ausreichend.

2.2 Variationen und Defekte

Der zweite Teil des Stands der Technik befasst sich mit der Kompensation von fertigungsbedingten Variationen auf die Eigenfrequenzen von Teilen bzw. einer eigenfrequenzbasier-ten Defekterkennung unter Berücksichtigung von Variationen.

Im Fortschrittsbericht des Projekts *Reliability Tools for Resonance Inspection of Light Metal Castings* ist beschrieben, wie mit Hilfe von FEM-Eigenfrequenzberechnungen eine Kalibrierung durchgeführt wird, auf deren Basis defekte Teile erkannt werden können. Demnach wird zunächst numerisch eine Datenbank mit den Eigenfrequenzen von Gutteilen geschaffen. Dabei werden zunächst einzeln die Einflüsse verschiedener fertigungsbedingter Geometrie- und Materialabweichungen (Abmessungen, Elastizitätsmodul, Dichte, Poissonzahl) ermittelt. Die durch die Einzeleinflüsse hervorgerufenen Frequenzverschiebungen werden abschließend unter Annahme zufälliger Material- und Geometrieigenschaften linear superpositioniert. Dies dient der Erzeugung eines Datensatzes mit summierten Frequenzverschiebungen zahlreicher zufällig schwankender Gut-Teile. Zusätzlich wird ein entsprechender Datensatz für Teile mit verschiedenen Defekten angelegt. Zuletzt wird auf Basis aller Daten mit einem Algorithmus bestimmt, anhand welcher Merkmale die defekten und nicht defekten Teile voneinander unterschieden werden können. Anhand von entsprechenden realen Teilen zeigte sich, dass der beschriebene Ansatz in die Praxis übertragbar ist [NDE901 2012].

In einer Veröffentlichung von *Schmidt und Steinbuch* ist anhand eines einfachen Biegebalkens der Einfluss von Geometrieschwankungen auf die Eigenfrequenzen beschrieben. Der Balken wurde, jeweils gesondert betrachtet, um einen definierten Wert (jeweils 5%) bzgl. verschiedener Geometrieparameter (u. a. Länge und Höhe) geändert. Die davon abhängigen Verschiebungen der ersten sieben Eigenfrequenzen wurden mit FEM ermittelt. Dabei wurde festgestellt, dass die Eigenfrequenzen unterschiedlich auf die Änderungen bzgl. der verschiedenen Geometrieparameter reagieren. Für kleine Änderungen der Parameter wurde ein näherungsweise linearer Zusammenhang zwischen der Änderung eines Geometrieparameters und der daraus resultierenden Eigenfrequenzverschiebung gefun-

den. Unter Ausnutzung dessen superpositionierten die Autoren den Einfluss verschiedener gleichzeitig auftretender Abweichungen unterschiedlicher Größenordnungen linear. Die so abgeschätzten Frequenzen wichen jeweils weniger als 7% von den tatsächlichen Werten ab. Für kleine Abweichungen führte die lineare Superposition einzelner Effekte also zu einem guten Ergebnis. Ebenso wurde der Einfluss von Rissen auf die Eigenfrequenzen des Balkens untersucht. Dabei zeigte sich u. a. ein nichtlinearer Zusammenhang zwischen Rissposition bzw. ein näherungsweise linearer Zusammenhang zwischen Rissgröße und defektbedingten Eigenfrequenzverschiebungen. Weiterhin beschreiben die Autoren einen Ansatz, wie mit einer Kleinste-Quadrate-Schätzung aus den beobachteten Frequenzverschiebungen sowohl die Geometrie, als auch Defektpositionen und -größen abgeschätzt werden können. Anhand einiger Beispiele wurde die Vorgehensweise überprüft, wobei sich dabei nicht immer zufriedenstellende Ergebnisse zeigten. Einige Parameter konnten mit einem geringen Fehler, andere wiederum nur mit großem Fehler rekonstruiert werden. Für eine Bremsscheibe mit vier variierenden Parametern und unbekanntem Abweichungen zu einer Referenzgeometrie konnten beispielsweise nur zwei der unbekanntem Abweichungen mit tolerierbaren Fehlern von 2,5% und 12% rekonstruiert werden. Die Autoren führten die nicht zufriedenstellenden Resultate für die anderen beiden Abweichungen darauf zurück, dass nur Eigenfrequenzen bis 20 kHz genutzt wurden [Schmidt 2002]. Dennoch wurde die prinzipielle Vorgehensweise patentiert [Steinbuch 2006]. In einer anderen Veröffentlichung von *Steinbuch* werden weitere Ansätze zur Unterscheidung von tolerierbaren Variationen und Defekten präsentiert [Steinbuch 2004].

Resonant Ultrasound Spectroscopy (RUS) dient nicht zur Abschätzung der Geometrie eines Körpers bzw. zur Kompensation zufälliger Geometrievariationen anhand seiner Eigenfrequenzen, jedoch werden die Eigenfrequenzen zur Bestimmung der elastischen Materialkonstanten genutzt. RUS basiert daher ebenfalls auf einer inversen Problemstellung. RUS findet hauptsächlich für kleine, geometrisch einfache Proben (Parallelepiped, Kugel, Zylinder) Verwendung, wobei in jedem Fall eine definierte Geometrie erforderlich ist. Außerdem ist RUS nicht nur für isotrope, sondern auch für anisotrope Materialien mit niedrigen Kristallsymmetrien geeignet. Das Prinzip des Verfahrens beruht darauf, dass die Eigenfrequenzen einer Probe zunächst messtechnisch bestimmt werden. Unter Annahme eines geeigneten Modells zur Berechnung der Eigenfrequenzen, der Probengeometrie und der Materialdichte werden die elastischen Materialkonstanten iterativ so variiert, dass die mit dem Modell errechneten Eigenfrequenzen möglichst gut mit den gemessenen Eigenfrequenzen übereinstimmen [Migliori 1997, 2001].

3 Grundlagen der Regressionsanalyse

Die folgenden Grundlagen und einige weitere Kapitel dieser Arbeit setzen gewisse statistische Grundkenntnisse voraus. Aus Gründen der Übersichtlichkeit sind die erforderlichen Zusammenhänge in Anhang A.4 zusammengefasst. Dort wird u. a. auf Zufallsgrößen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen, Parameterschätzungen und statistische Parametertests eingegangen. Weiterhin werden im Anhang zahlreiche Begriffe aus der Statistik (z. B. Erwartungswert, Varianz, Schätzfunktion, Signifikanzniveau u. v. a.) erklärt.

3.1 Modellgleichung und Schätzung

Die Ausführungen in diesem Kapitel beziehen sich hauptsächlich auf [Draper 1998, von Auer 2011]. In diesem Abschnitt wird nicht explizit auf diese Literatur verwiesen; ergänzende Literatur wird jedoch an entsprechender Stelle genannt.

In der Ökonomie, Physik und Technik existieren zahlreiche funktionale Zusammenhänge zwischen verschiedenen Größen. Oftmals sind die genauen Beziehungen jedoch zu kompliziert, nicht bekannt oder sogar aus physikalischer Sicht bedeutungslos, sodass keine allgemeine Formeln zur Beschreibung existieren. In solchen Fällen können die unbekannteren Zusammenhänge mit Hilfe einfacher mathematischer Modelle auf Basis beobachteter Werte näherungsweise ermittelt werden. Unter anderem dazu dient die Regressionsanalyse, auf die im Folgenden eingegangen wird.

Falls zwischen zwei Größen x und y ein funktionaler Zusammenhang g der Form $y = g(x)$ besteht, wird im einfachsten Fall davon ausgegangen, dass dieser wie in Gl. (3.1) gezeigt linear ist.

$$y = \alpha + \beta \cdot x \tag{3.1}$$

Dabei stellen die Variablen α und β zwei konstante, im weiteren Verlauf als *Modellparameter* bezeichnete Parameter dar. Ein solcher Zusammenhang entspricht in einem x - y -Koordinatensystem einer Geraden mit dem y -Achsenabschnitt α und der Steigung β . Jedoch stellt Gl. (3.1) eine theoretische Abstraktion dar, da die Beziehung von x und y

in der Realität durch zufällige Störeinflüsse überlagert ist. Um dies zu berücksichtigen, zeigt Gl. (3.2) einen entsprechenden Zusammenhang, in dem eine zusätzliche Störgröße ε_i berücksichtigt wird.

$$y_i = \alpha + \beta \cdot x_i + \varepsilon_i \quad \text{mit } i = 1, \dots, n \quad (3.2)$$

Weiterhin wurden in Gl. (3.2) die Variablen x und y durch entsprechende Variablen x_i und y_i mit einem Beobachtungsindex i ersetzt. Denn die Regressionsanalyse basiert darauf, dass insgesamt n Beobachtungen $(x_i; y_i)$ (mit $i = 1, \dots, n$) von x und y zur Verfügung stehen.

Der in Gl. (3.2) dargestellte Zusammenhang entspricht dem *einfachen linearen Regressionsmodell*. Die Variable y wird als *y-Variable, Zielgröße, endogene Variable* oder *Regressand*, die Variable x als *x-Variable, Eingangsgröße, exogene Variable* oder *Regressor* bezeichnet. Insbesondere für die Störgröße ε_i werden einige Annahmen getroffen. So soll diese für alle Beobachtungen i (mit $i = 1, \dots, n$) normalverteilt mit einem Erwartungswert von 0 und einer konstanten Varianz sein. Weiterhin wird u. a. davon ausgegangen, dass die exogene Variable deterministisch und die endogene Variable eine Zufallsgröße ist [Papula 2011, Mittag 2011]. Angemerkt sei, dass Zufallsgrößen in der Literatur gewöhnlich mit Großbuchstaben bezeichnet werden und das Modell nach Gl. (3.2) daher korrekterweise wie in Gl. (3.3) gezeigt dargestellt werden müsste [Mittag 2011].

$$Y_i = \alpha + \beta \cdot x_i + \varepsilon_i \quad \text{mit } i = 1, \dots, n \quad (3.3)$$

In Anlehnung an die genutzte Literatur wird im weiteren Verlauf der Arbeit auf eine solche Darstellung des Modells verzichtet.

Oftmals ist es jedoch nicht ausreichend, die Werte einer endogenen Variable y durch die Werte einer exogenen Variablen x zu erklären. Durch die Aufnahme mehrerer exogener Variablen x_1, x_2, \dots, x_k ergibt sich das in Gl. (3.4) gezeigte Modell, in dem ebenfalls eine Störgröße ε_i sowie ein Beobachtungsindex i (mit $i = 1, \dots, n$) berücksichtigt sind.

$$y_i = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot x_{i|1} + \alpha_2 \cdot x_{i|2} + \dots + \alpha_k \cdot x_{i|k} + \varepsilon_i \quad \text{mit } i = 1, \dots, n \quad (3.4)$$

Dieses Modell entspricht dem *multiplen linearen Regressionsmodell*, wobei die Variablen $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ wiederum konstante Modellparameter darstellen. Auch dieses Modell basiert auf Annahmen, die in Kapitel 3.4 aufgelistet sind. Das multiple lineare Regressionsmodell entspricht einer Verallgemeinerung des Modells der einfachen linearen Regression

[Mittag 2011]. Explizit ausgeschrieben für n Beobachtungen ergibt sich das in Gl. (3.5) dargestellte Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_0 + \alpha_1 \cdot x_{1|1} + \alpha_2 \cdot x_{1|2} + \dots + \alpha_k \cdot x_{1|k} + \varepsilon_1 \\ y_2 &= \alpha_0 + \alpha_1 \cdot x_{2|1} + \alpha_2 \cdot x_{2|2} + \dots + \alpha_k \cdot x_{2|k} + \varepsilon_2 \\ &\vdots \\ y_n &= \alpha_0 + \alpha_1 \cdot x_{n|1} + \alpha_2 \cdot x_{n|2} + \dots + \alpha_k \cdot x_{n|k} + \varepsilon_n \end{aligned} \quad (3.5)$$

Jede Zeile in Gl. (3.5) bezieht sich auf eine der n Beobachtungen, in jeder Zeile sind die entsprechenden Variablen bzw. Beobachtungswerte, also das jeweilige y_i sowie die jeweiligen $x_{i|1}, x_{i|2}, \dots, x_{i|k}$, berücksichtigt. Die jeweiligen Störgrößen ε_i sind nicht beobachtbar.

Kompakter kann das Modell nach Gl. (3.4) bzw. Gl. (3.5) wie in Gl. (3.6) gezeigt in Matrixschreibweise formuliert werden.

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.6)$$

$$\text{mit } \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_{1|1} & \cdots & x_{1|k} \\ 1 & x_{2|1} & \cdots & x_{2|k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n|1} & \cdots & x_{n|k} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

In Gl. (3.6) stellen die Variablen \mathbf{y} und $\boldsymbol{\varepsilon}$ jeweils n -elementige Spaltenvektoren, die Variable $\boldsymbol{\alpha}$ einen $(k+1)$ -elementigen Spaltenvektor und die Variable \mathbf{X} eine $(n \times (k+1))$ -Matrix dar. Der Aufbau der Vektoren und der Matrix ist in Gl. (3.6) dargestellt.

Nachdem die Modellgleichung nun spezifiziert wurde, werden auf Basis von n Beobachtungen $(x_{i|1}, x_{i|2}, \dots, x_{i|k}; y_i)$ (mit $i = 1, \dots, n$), also auf Basis der Matrix \mathbf{X} sowie des Spaltenvektors \mathbf{y} , Schätzwerte für die Modellparameter $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ ermittelt. Die Schätzwerte werden mit $\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_k$ bzw. $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ bezeichnet. Mit diesen ergibt sich letztendlich der in Gl. (3.7) bzw. in Gl. (3.8) (in Matrixschreibweise) gezeigte Zusammenhang.

$$\hat{y}_i = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 \cdot x_{i|1} + \hat{\alpha}_2 \cdot x_{i|2} + \dots + \hat{\alpha}_k \cdot x_{i|k} \quad \text{mit } i = 1, \dots, n \quad (3.7)$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\alpha}} \quad (3.8)$$

Ein solcher Zusammenhang wird als *geschätztes Modell* (oder in dieser Arbeit auch als *Regressionsfunktion*) bezeichnet. Das geschätzte Modell stellt den vermuteten (wahren, von Störeinflüssen freien) Zusammenhang zwischen der endogenen Variable y und den exogenen Variablen x_1, x_2, \dots, x_k dar.

In Gl. (3.7) bzw. in Gl. (3.8) entsprechen die Variablen \hat{y}_i den Schätzwerten der beobachteten Werte y_i der endogenen Variablen. Der n -elementige Spaltenvektor $\hat{\mathbf{y}}$ beinhaltet eben diese Schätzwerte. Die Differenzen $e_i = y_i - \hat{y}_i$ zwischen den Schätzwerten \hat{y}_i und den beobachteten Werten y_i werden als *Residuen* bezeichnet. Jedes *Residuum* e_i ist als Schätzung $\hat{\varepsilon}_i$ der entsprechenden Störgröße ε_i zu verstehen. Die zur Ermittlung der Schätzwerte $\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_k$ genutzten *Schätzer* (oder *Schätzfunktionen*) basieren auf der *Methode der kleinsten Quadrate (KQ-Methode)* und werden daher als *KQ-Schätzer* bezeichnet. Dabei werden die Schätzwerte $\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_k$ so bestimmt, dass unter Berücksichtigung aller n Beobachtungen $(x_{i|1}, x_{i|2}, \dots, x_{i|k}; y_i)$ (mit $i = 1, \dots, n$) die in Gl. 3.9 gezeigte Summe $S_{\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}}$ der Residuenquadrate minimal wird.

$$S_{\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}} = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n \left(y_i - \left(\hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 \cdot x_{i|1} + \hat{\alpha}_2 \cdot x_{i|2} + \dots + \hat{\alpha}_k \cdot x_{i|k} \right) \right)^2 \quad (3.9)$$

Für eine Minimierung dieser Summe müssen die Ableitungen erster Ordnung Null gesetzt werden ($\partial S_{\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}}/\partial \hat{\alpha}_0 = 0, \partial S_{\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}}/\partial \hat{\alpha}_1 = 0, \dots, \partial S_{\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}}/\partial \hat{\alpha}_k = 0$). Die KQ-Schätzung der Modellparameter kann wie in Gl. (3.10) gezeigt in Matrixschreibweise ausgedrückt werden.

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \left(\mathbf{X}\mathbf{X}^T \right)^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} \quad (3.10)$$

Unter gewissen Annahmen (siehe Kapitel 3.4) sind die KQ-Schätzer *BLUE* (*Best Linear Unbiased Estimator*), d. h. sie sind *erwartungstreu* (unverzerrt) und innerhalb der Klasse der unverzerrten linearen Schätzer *effizient*. Abschließend sei angemerkt, dass das geschätzte Modell zur Prognose ebenso auf neue Werte der exogenen Variablen angewendet werden kann, um den zugehörigen Wert der endogenen Variablen zu schätzen. In einem Standardmodell nach Gl. (3.2) oder Gl. (3.4) können auch Terme höherer Ordnung (z. B. Quadrate) enthalten sein. Ein Beispiel dafür ist in Gl. (3.11) gezeigt.

$$y_i = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot x_{i|1} + \alpha_2 \cdot x_{i|2} + \dots + \alpha_k \cdot x_{i|k} + \varepsilon_i \quad \text{mit } i = 1, \dots, n \quad (3.11)$$

Auch ein solches Modell ist linear in den Parametern, daher gelten die vorherigen Ausführungen zur Schätzung der Modellparameter entsprechend. Modelle, die nichtlinear in den Parametern sind, erfordern oftmals einen hohen numerischen Aufwand, um die entsprechenden Modellparameter optimal zu schätzen. Solche Modelle können jedoch in vielen Fällen durch Variablentransformationen linearisiert werden. Nach der Schätzung der Modellparameter im linearisierten Modell, muss eine Rücktransformation durchgeführt werden [Papula 2011].

3.2 Bestimmtheitsmaß R^2

Ein auf Basis von n Beobachtungen $(x_{i|1}, x_{i|2}, \dots, x_{i|k}; y_i)$ (mit $i = 1, \dots, n$) geschätztes Modell nach Gl. (3.7) bzw. Gl. (3.8) kann mit Hilfe des sogenannten Bestimmtheitsmaßes R^2 bewertet werden. Das Bestimmtheitsmaß R^2 stellt dabei das Verhältnis der durch das geschätzte Modell erklärten Variation $S_{\hat{y}\hat{y}} = S_{yy} - S_{\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}}$ und der entsprechenden gesamten Variation $S_{yy} = S_{\hat{y}\hat{y}} + S_{\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}}$ der y -Werte (also der y_i mit $i = 1, \dots, n$) dar. Dabei ist $S_{\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}}$ die Summe der quadrierten Residuen $e_i = y_i - \hat{y}_i$ zwischen den beobachteten Werten y_i und den Schätzwerten \hat{y}_i der endogenen Variable; $S_{\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}}$ entspricht somit der nicht erklärten Variation. Formeln zur Berechnung der Variationen S_{yy} , $S_{\hat{y}\hat{y}}$ und $S_{\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}}$ bzw. des Bestimmtheitsmaßes R^2 sind in Gl. (3.12a) bis Gl. (3.12c) bzw. in Gl. (3.13) gezeigt, wobei die Variable \bar{y} den Mittelwert der beobachteten y -Werte darstellt [Draper 1998, Schlittgen 2003, von Auer 2011].

$$S_{yy} = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \quad \text{gesamte Variation} \quad (3.12a)$$

$$S_{\hat{y}\hat{y}} = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 \quad \text{erklärte Variation} \quad (3.12b)$$

$$S_{\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}} = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad \text{nicht erklärte Variation} \quad (3.12c)$$

$$R^2 = \frac{\text{erklärte Variation}}{\text{gesamte Variation}} = \frac{S_{yy} - S_{\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}}}{S_{yy}} = \frac{S_{\hat{y}\hat{y}}}{S_{yy}} = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \quad (3.13)$$

Das Bestimmtheitsmaß R^2 kann auch unmittelbar aus den Beobachtungsdaten, also ohne vorherige Ermittlung von Schätzwerten der endogenen Variable, berechnet werden kann. Das Bestimmtheitsmaß R^2 kann Werte zwischen 0 und 1 (also zwischen 0 % und 100 %) annehmen. Je höher der Wert ist, desto größer ist der Anteil der erklärten Variation der y -Werte und desto geeigneter ist das geschätzte Modell. Da das Bestimmtheitsmaß R^2 stets mit der Anzahl k der exogenen Variablen steigt, ist es sinnvoll, zum Vergleich unterschiedlich komplexer Modelle das korrigierte Bestimmtheitsmaß \bar{R}^2 nach Gl. (3.14) heranzuziehen; die Variable n in Gl. (3.14) entspricht der Anzahl der Beobachtungen.

$$\bar{R}^2 = 1 - (1 - R^2) \frac{n - 1}{n - k - 1} \quad (3.14)$$

3.3 Schrittweise Regressionsanalyse

In Kapitel 3.1 bestand die Annahme, dass das multiple lineare Regressionsmodell nach Gl. (3.4) den wahren Zusammenhang zwischen der endogenen Variable y und den exogenen Variablen x_1, x_2, \dots, x_k darstellt. In der Praxis sind von den k Größen x_1, x_2, \dots, x_k jedoch nur diese als exogene Variablen zu berücksichtigen, die tatsächlich auch die Variation der endogenen Variablen erklären. Fehlende oder irrelevante exogene Variablen stellen eine Annahmenverletzung dar. Zur Ermittlung eines geeigneten Modells auf Basis beobachteter Daten inkl. Auswahl der signifikanten exogenen Variablen dient die *schrittweise Regressionsanalyse*. Die folgenden Ausführungen beziehen sich auf [Draper 1998].

Eine schrittweise Regressionsanalyse kann auf verschiedene Arten ablaufen, die vor allem bei großen Datensätzen zu unterschiedlichen Modellen führen können. Im Folgenden wird das sogenannte *Rückwärtsverfahren Rückwärtsverfahren (Backward Elimination)* exemplarisch beschrieben. Es wird dabei von einem Modell mit allen k potentiellen Eingangsgrößen x_1, x_2, \dots, x_k ausgegangen. Eine solche Modellgleichung hat damit folgende Form: $y_i = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot x_{i|1} + \alpha_2 \cdot x_{i|2} + \dots + \alpha_k \cdot x_{i|k} + \varepsilon_i$ (mit $i = 1, \dots, n$). Zunächst werden die Parameter $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ dieses Modells mit der KQ-Methode geschätzt. Daraufhin wird die nicht erklärte Variation $S_{\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}}$ nach Gl. (3.12c) bestimmt.

Anschließend werden in einer Schleife k analoge Modelle geschätzt, wobei nacheinander jeweils genau eine Variable x_j (mit $j = 1, \dots, k$) aus dem vollständigen Modell entfernt wird. Auch für jedes dieser Modelle wird die Summe der quadrierten Residuen bestimmt. Im Folgenden bezeichnet $S_{\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}|j}$ die entsprechende Summe, die sich unter Vernachlässigung

von x_j (mit $j = 1, \dots, k$) ergibt. Die Variable x_{j^*} , für welche die kleinste Summe $S_{\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}|j^*}$ vorliegt, kann möglicherweise dauerhaft aus dem Ausgangsmodell entfernt werden. Zur Entscheidung, ob diese Variable vernachlässigt werden darf, bzw. ob der entsprechende Modellparameter α_{j^*} den Wert 0 hat, oder nicht, dient ein sogenannter *partieller F-Test*. Dazu werden zunächst eine Nullhypothese $H_0 : \alpha_{j^*} = 0$ und eine Alternativhypothese $H_1 : \alpha_{j^*} \neq 0$ formuliert. Anschließend wird die in Gl. (3.15) gezeigte Testgröße T_{j^*} ermittelt.

$$T_{j^*} = \frac{n - k - 1}{1} \cdot \frac{S_{\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}|j^*} - S_{\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}}}{S_{\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}}} \quad (3.15)$$

Die Testgröße T_{j^*} ist unter der Annahme der Normalverteilung der Störgröße bzw. der Residuen F -verteilt. Daraufhin wird ein kritischer Wert $F_{1, n-k-1}(1 - \alpha)$ für die Testgröße unter Berücksichtigung der Freiheitsgrade 1 und $n - k - 1$ sowie einem gewählten Signifikanzniveau $\alpha = \alpha_{remove}$ mit einer Software bestimmt oder aus einer entsprechenden Tabelle entnommen. Ist $T_{j^*} < F_{1, n-k-1}(1 - \alpha)$, wird die Nullhypothese $H_0 : \alpha_{j^*} = 0$ beibehalten und die Variable x_{j^*} dauerhaft aus dem Modell entfernt. Alternativ kann eine Testentscheidung mit Hilfe des *p-Wertes (empirisches Signifikanzniveau)* erfolgen. In einem solchen Fall wird die beschriebene Vorgehensweise mit dem um x_{j^*} reduzierten Modell als neues Ausgangsmodell wiederholt. Kann auf Basis des F -Tests die betrachtete exogene Variable nicht entfernt werden, wird die Prozedur beendet.

Neben dem Rückwärtsverfahren existieren weitere Verfahren zur Variablenauswahl. Bei dem sogenannten *Vorwärtsverfahren (Forward Selection)* wird zunächst von einer Modellgleichung mit nur einer Konstanten ausgegangen. Davon ausgehend wird die Variable x_{j^*} aller k möglichen Variablen x_j (mit $j = 1, \dots, k$) ermittelt, deren Aufnahme in die Modellgleichung zu dem größten Bestimmtheitsmaß R^2 bzw. zu der kleinsten nicht erklärten Variation $S_{\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}|j^*}$ führt. Die entsprechende Variable wird dauerhaft in das Modell aufgenommen, wenn die erklärte Variation der endogenen Variable auf Basis des erweiterten Modells signifikant höher als zuvor ist. Zur Überprüfung der Signifikanz dient wiederum ein partieller F -Test. In weiteren Schritten wird analog die Variable dauerhaft in das Modell aufgenommen, die zu dem größten Bestimmtheitsmaß R^2 bzw. der geringsten nicht erklärten Variation $S_{\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}|j^*}$ führt. Sobald keine Variable mehr aufgenommen werden kann, wird die Prozedur beendet.

Weiterhin können Vorwärts- und Rückwärtsverfahren auch kombiniert werden. Beispielsweise kann ein Algorithmus unmittelbar nach jeder Aufnahme einer Variablen prü-

fen, ob eine andere Variable nun redundant ist und auf Basis eines partiellen F -Tests entfernt werden kann. Prinzipiell sind jedoch sehr vielfältige Algorithmen denkbar.

3.4 Modellannahmen

Die Durchführung einer Regressionsanalyse basiert auf zahlreichen Annahmen, die wichtigsten sind im Folgenden in Anlehnung an [von Auer 2011] genannt. Dort werden *A-Annahmen*, *B-Annahmen* und *C-Annahmen* unterschieden. Die A-Annahmen beziehen sich auf die funktionale Spezifikation des Modells, die B-Annahmen auf die Störgröße und die C-Annahmen auf die im Modell berücksichtigten Variablen. Für eine multiple lineare Regressionsanalyse bzw. für eine dem Standardmodell nach Gl. (3.4) entsprechende Modellgleichung wird Folgendes gefordert:

- **Annahme A1** (Variablenauswahl): In der Modellgleichung fehlen keine relevanten exogenen Variablen und keine der exogenen Variablen ist irrelevant.
- **Annahme A2** (Linearität): Der wahre Zusammenhang zwischen den exogenen Variablen und der endogenen Variable ist linear.
- **Annahme A3** (Parameterkonstanz): Die $k+1$ Modellparameter $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k$ sind für alle n Beobachtungen $(x_{i|1}, x_{i|2}, \dots, x_{i|k}, y_i)$ konstant.
- **Annahme B1** (Erwartungswert): Die Störgröße ε_i hat für alle Beobachtungen i einen Erwartungswert $E(\varepsilon_i)$ von Null (also $E(\varepsilon_i) = 0$, für $i = 1, \dots, n$).
- **Annahme B2** (Homoskedastizität): Die Störgröße ε_i hat für alle Beobachtungen i eine konstante Varianz σ^2 (also $\text{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$, für $i = 1, \dots, n$).
- **Annahme B3** (Keine Autokorrelation): Die Störgröße ist nicht korreliert (also $\text{Cov}(\varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}) = 0$, für alle $i_1 \neq i_2$ sowie $i_1 = 1, \dots, n$ und $i_2 = 1, \dots, n$).
- **Annahme B4** (Normalverteilung): Die Störgröße ε_i ist normalverteilt (also $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(E(\varepsilon_i); \text{Var}(\varepsilon_i))$, für $i = 1, \dots, n$).
- **Annahme C1** (Keine Zufallsgrößen): Die exogenen Variablen sind keine Zufallsgrößen, sondern können wie in einem Experiment kontrolliert werden.
- **Annahme C2** (Keine perfekte Multikollinearität): Zwischen den Werten der exogenen Variablen besteht keine perfekte Multikollinearität.

4 Lösungsansatz und Zielstellung

Jede Eigenfrequenz eines fehlerfreien, frei schwingbar gelagerten Körpers hängt lediglich von der Geometrie und den Materialeigenschaften ab. Für viele Anwendungen in der Praxis können die Eigenfrequenzen eines solchen Bauteils entweder analytisch oder numerisch unter Berücksichtigung von Geometrie und Materialeigenschaften ausreichend genau berechnet werden. Der Rückschluss von den Eigenfrequenzen eines Teils auf seine Geometrie ist im Allgemeinen jedoch nicht möglich. Denn selbst bei bekannten homogen-isotropen Materialeigenschaften sind geometrisch völlig verschiedene Körper denkbar, die bis zu einer relevanten Frequenz (z. B. bis 20 kHz) identische Eigenfrequenzen aufweisen.

Auf Basis von Kapitel 1.3 und Kapitel 2 wurde eine Idee entwickelt, wie die exakte Geometrie eines zufällig aus einer Grundgesamtheit ausgewählten Teils mit zufallsbehafteten Abmessungen anhand endlich vieler seiner Eigenfrequenzen im Anschluss an eine Kalibrierung mit vergleichbaren Teilen möglicherweise rekonstruiert werden kann. Die Idee basiert darauf, dass sich nominell gleiche Teile einer Grundgesamtheit auf Grund von zufälligen Störeinflüssen hinsichtlich ihrer Abmessungen (und ihrer Materialeigenschaften) und daher auch hinsichtlich ihrer Eigenfrequenzen unterscheiden.

Konkret umfasst die Idee, dass zunächst aus einer Grundgesamtheit nominell gleicher, vollständig über Geometrieparameter beschreibbarer Teile eine zufällige Stichprobe vom Umfang n_{cal} gezogen wird. Daraufhin werden die tatsächlichen Abmessungen bzgl. sämtlicher Geometrieparameter und die jeweils ersten m Eigenfrequenzen dieser Teile ermittelt. Abschließend sollen mit multipler Regressionsanalyse geeignete lineare Zusammenhänge zwischen den Geometrieparametern als Zielgrößen und den Eigenfrequenzen als Eingangsgrößen bestimmt werden. Dieser Schritt ist als Kalibrierung zu verstehen. Die resultierenden Zusammenhänge ermöglichen die Berechnung von Schätzwerten für die tatsächlichen Abmessungen eines beliebigen Teils der Grundgesamtheit in Abhängigkeit von dessen Eigenfrequenzen. Die Zusammenhänge können letztendlich auf bisher nicht betrachtete Teile übertragen und z. B. an weiteren n_{val} stichprobenartig gezogenen Teilen validiert werden. Die Idee zielt im Endeffekt auf eine Vorgehensweise ab, die in dieser Arbeit sinngemäß als *eigenfrequenzbasierte Geometrieabschätzung* bezeichnet wird.

Zur Überprüfung des Potentials einer solchen Vorgehensweise wurde ein konkreter Lösungsansatz ausgearbeitet. Eine unmittelbare Umsetzung der beschriebenen eigenfrequenzbasierten Geometrieabschätzung würde eine große Teileanzahl und einen hohen technischen und finanziellen Aufwand zur Charakterisierung der Teile hinsichtlich tatsächlicher Abmessungen und Eigenfrequenzen erfordern. Daher beschränkt sich der Lösungsansatz auf die Betrachtung virtueller Teile mit konstanten homogen-isotropen Materialeigenschaften. Denn für virtuelle Teile können die tatsächlichen Abmessungen zeitsparend und kostengünstig mit Zufallszahlen erzeugt und die davon abhängigen Eigenfrequenzen numerisch mit der Finite-Elemente-Methode berechnet werden. Die Verwendung virtueller Teile hat darüber hinaus zur Folge, dass einige weitere in der Realität zu erwartende Störeinflüsse (z. B. Ungenauigkeiten bei den Eigenfrequenz- und Geometriemessungen, Umgebungseinflüsse, makroskopische Defekte, Materialinhomogenitäten etc.) vermieden werden können. Somit kann die Idee bzw. der Lösungsansatz losgelöst von zahlreichen Störeffekten bewertet werden. Dies ist bei der späteren Bewertung der Idee bzw. des Lösungsansatzes jedoch unbedingt zu berücksichtigen.

Der ausgearbeitete Lösungsansatz umfasst folgende drei Arbeitsschritte, die grob in Abbildung 4.1 bzw. detailliert in Abbildung 4.2 dargestellt sind:

- 1) *Generierung von Daten*
- 2) *Kalibrierung*
- 3) *Validierung*

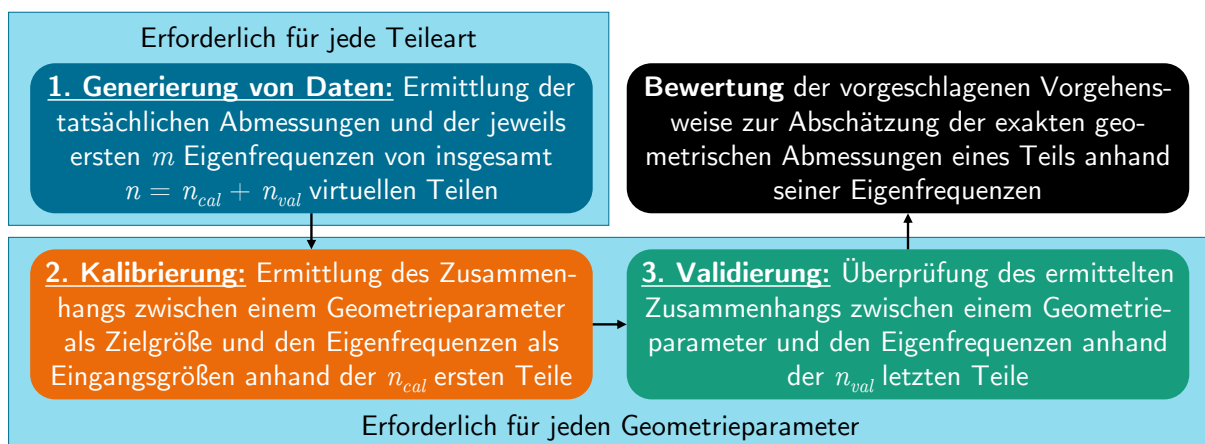


Abbildung 4.1: Grobe schematische Darstellung der geplanten Vorgehensweise mit den Arbeitsschritten *Generierung von Daten* (blau), *Kalibrierung* (orange) und *Validierung* (grün)

Im Folgenden werden die drei Schritte des Lösungsansatzes grob beschrieben. Eine umfassende Beschreibung der Teile und des Untersuchungsprogramms finden sich in Kapitel 5.

1. Generierung von Daten: Bei der *Generierung von Daten* werden die tatsächlichen Abmessungen und die jeweils ersten m davon abhängigen Eigenfrequenzen von insgesamt $n = n_{cal} + n_{val}$ zufällig aus einer Grundgesamtheit ausgewählten virtuellen Teilen ermittelt. Damit werden Daten für die spätere Kalibrierung bzw. Validierung erzeugt. Es werden also insgesamt n virtuelle Teile stichprobenartig aus einer Grundgesamtheit gezogen, in eine *Kalibrierstichprobe* (Umfang: n_{cal}) sowie eine davon unabhängige *Validierstichprobe* (Umfang: n_{val}) unterteilt sowie hinsichtlich ihrer Abmessungen und ihrer jeweils ersten m Eigenfrequenzen charakterisiert. Die tatsächlichen Abmessungen und die zugehörigen Eigenfrequenzen der n_{cal} bzw. n_{val} Teile werden als *Kalibrierdaten* bzw. *Validierdaten* bezeichnet. Die zufällige Teileauswahl wird darüber realisiert, dass die tatsächlichen Abmessungen der Teile bzgl. aller acht Geometrieparameter mit Hilfe stochastisch unabhängiger, normalverteilter Zufallszahlen beschrieben werden. Daraufhin dienen numerische Eigenfrequenzberechnungen mit der *Finite-Elemente-Methode (FEM)* dazu, die von der jeweiligen exakten Teilegeometrie abhängigen Eigenfrequenzen zu bestimmen. Die Materialeigenschaften werden dabei als konstant (sowie homogen-isotrop) und die Teile als freischwebend angenommen, es wird keine Materialdämpfung berücksichtigt.

2. Kalibrierung: Im Rahmen der anschließenden *Kalibrierung* werden auf Basis der Kalibrierdaten geeignete Zusammenhänge zwischen jeweils einem Geometrieparameter als Zielgröße sowie den Eigenfrequenzen als Eingangsgrößen mit multipler Regressionsanalyse bestimmt. Dabei wird von einem linearen Modellansatz ausgegangen. Um Wechselwirkungen zu berücksichtigen, werden weiterhin Produkte aus jeweils zwei Eigenfrequenzen als zusätzliche Eingangsgrößen verwendet. Zur Bestimmung relevanter Eingangsgrößen kommt darüber hinaus ein schrittweiser Regressionsalgorithmus zum Einsatz. Als Ergebnis einer solchen Regressionsanalyse resultiert letztendlich eine Regressionsfunktion. Mit Hilfe dieser kann für ein zufällig aus der Grundgesamtheit ausgewähltes Teil in Abhängigkeit seiner ersten m Eigenfrequenzen ein Schätzwert für die tatsächliche Abmessung bzgl. eines betrachteten Geometrieparameters ermittelt werden. Die Kalibrierung ist für jeden Geometrieparameter separat erforderlich.

3. Validierung: Bei der abschließenden *Validierung* wird – sowohl auf Basis der Kalibrierdaten als auch auf Basis der Validierdaten für bisher nicht betrachtete virtuelle Teile – überprüft, inwiefern die mit einer Regressionsfunktion bestimmten Schätzwerte mit den entsprechenden tatsächlichen Abmessungen bzgl. des betrachteten Geometrieparameters übereinstimmen. Konkret werden verschiedene Kennwerte gebildet (z. B. mittlere Differenz, maximaler Betrag der Differenzen, Korrelationskoeffizient zwischen Schätzwerten

und tatsächlichen Abmessungen) und Diagramme erstellt. Weiterhin resultieren bereits aus der Regressionsanalyse Kennwerte (z. B. das Bestimmtheitsmaß) und Diagramme, welche eine Aussage über die Qualität der ermittelten Regressionsfunktion ermöglichen. Anhand der Kennwerte und Diagramme wird letztendlich entschieden, ob die vorgeschlagene eigenfrequenzbasierte Geometrieabschätzung zur Rekonstruktion der exakten geometrischen Abmessungen zielführend ist. Die Validierung ist für jeden Geometrieparameter separat erforderlich.



Abbildung 4.2: Detaillierte schematische Darstellung der geplanten Vorgehensweise mit den Arbeitsschritten *Generierung von Daten* (blau), *Kalibrierung* (orange) und *Validierung* (grün)

Die Zielsetzung der Arbeit besteht darin, den ausgearbeiteten Lösungsansatz und damit auch die grundlegende Idee der eigenfrequenzbasierten Geometrieabschätzung hinsichtlich der prinzipiellen Fähigkeiten exemplarisch zu überprüfen. Außerdem soll das Verfahren unter Berücksichtigung der in dieser Arbeit vernachlässigten, praxisrelevanten Störeinflüsse diskutiert werden. Das übergreifende Ziel besteht letztendlich darin, defekte Teile anhand ihres Eigenschwingungsverhaltens trotz verschiedener Störeinflüsse prozesssicher und schnell erkennen zu können. Diese Arbeit stellt einen ersten Baustein dazu dar.

5 Versuchsmaterial und Untersuchungen

5.1 Virtuelle Versuchsteile

Für diese Arbeit stehen aus Kostengründen keine realen Teile zur Verfügung. Es werden daher ausschließlich virtuelle Teile betrachtet. Konkret erfolgen die Untersuchungen anhand zahlreicher virtueller Pleuelstangen, die geometrisch vollständig durch insgesamt acht *Geometrieparameter* beschrieben werden können.

In der Realität unterscheiden sich nominell gleiche Teile geometrisch auf Grund von zufälligen fertigungstechnologischen Einflüssen (siehe Kapitel 1.3). Um für die betrachteten virtuellen Pleuelstangen die Analogie zur Realität herzustellen, geschieht die Beschreibung ihrer tatsächlichen Abmessungen bzgl. der acht Geometrieparameter mit normalverteilten Zufallsgrößen (siehe Anhang A.4.1). Dadurch wird erreicht, dass alle Teile durch dieselbe prinzipielle Geometrie gekennzeichnet sind; verschiedene Teile weisen jedoch unterschiedliche tatsächliche Abmessungen bzgl. der Geometrieparameter auf.

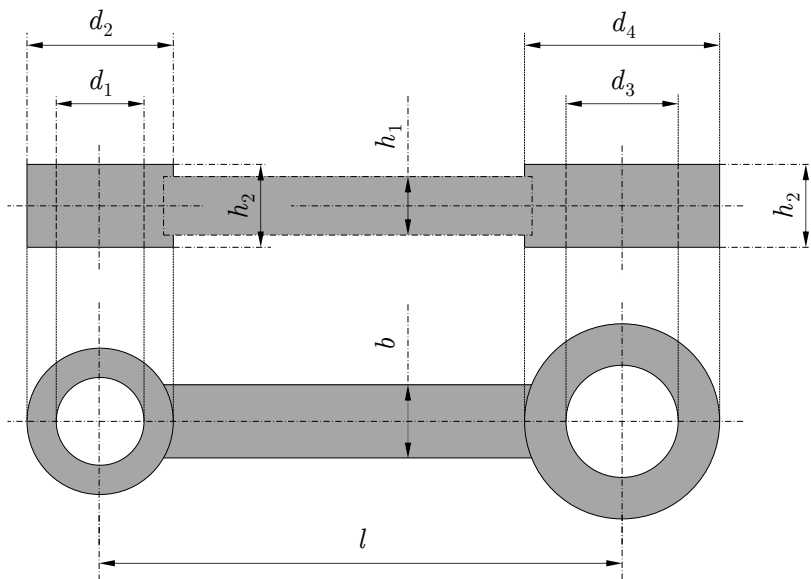
Zur Erläuterung vieler Zusammenhänge dient im weiteren Verlauf der Arbeit ein fiktiver Geometrieparameter y , der stellvertretend für einen beliebigen der acht Geometrieparameter steht. Die tatsächlichen Abmessungen aller N Pleuelstangen einer Grundgesamtheit bzgl. des Geometrieparameters y werden mit y_1, \dots, y_N bezeichnet.

Die prinzipielle Geometrie der virtuellen Pleuelstangen wird durch die Geometrieparameter $d_1, d_2, d_3, d_4, h_1, h_2, l$ und b beschrieben. Eine zufällig aus der Grundgesamtheit ausgewählte i -te Pleuelstange (mit $i = 1, \dots, N$) ist durch die folgenden Abmessungen bzgl. dieser Geometrieparameter gekennzeichnet (Geometrieparameter \rightarrow tatsächliche Abmessung der i -ten Pleuelstange bzgl. des Geometrieparameters):

- $d_1 \rightarrow d_{i|1}$
- $d_2 \rightarrow d_{i|2}$
- $d_3 \rightarrow d_{i|3}$
- $d_4 \rightarrow d_{i|4}$
- $h_1 \rightarrow h_{i|1}$
- $h_2 \rightarrow h_{i|2}$
- $l \rightarrow l_i$
- $b \rightarrow b_i$

Abbildung 5.1 zeigt die prinzipielle Geometrie einer zufällig ausgewählten i -ten Pleuelstange sowie ihre tatsächlichen Abmessungen bzgl. der acht Geometrieparameter.

Pleuelstange mit acht unabhängigen Geometrieparametern

Abmessungen der i -ten Pleuelstange

- $d_1 \rightarrow d_{i|1}$
- $d_2 \rightarrow d_{i|2}$
- $d_3 \rightarrow d_{i|3}$
- $d_4 \rightarrow d_{i|4}$
- $h_1 \rightarrow h_{i|1}$
- $h_2 \rightarrow h_{i|2}$
- $l \rightarrow l_i$
- $b \rightarrow b_i$

Abbildung 5.1: Schematische Darstellung der prinzipiellen Geometrie der zufällig ausgewählten i -ten Pleuelstange sowie ihrer tatsächlichen Abmessungen bzgl. der acht unabhängigen Geometrieparameter $(d_1, d_2, d_3, d_4, h_1, h_2, l, b)$

Die tatsächlichen Abmessungen y_1, \dots, y_N aller N Teile der Grundgesamtheit bzgl. des fiktiven Geometrieparameters y werden als Realisierungen von unabhängigen und identisch mit dem Erwartungswert μ_Y und der Varianz σ_Y^2 normalverteilten Zufallsgrößen Y_1, \dots, Y_N angesehen. Somit wird für jede der Zufallsgrößen Y_1, \dots, Y_N eine $\mathcal{N}(\mu_Y; \sigma_Y^2)$ -Verteilung angenommen. Der Erwartungswert μ_Y soll dabei gerade dem Nennmaß y_{Nenn} des Geometrieparameters y entsprechen. Die tatsächlichen Abmessungen y_1, \dots, y_N aller Teile bzgl. des Geometrieparameters y liegen darüber hinaus zu ca. 99,7% innerhalb eines $\pm 3\sigma$ -Intervalls um den Erwartungswert μ_Y . Die Abmessungen verschiedener Teile bzgl. desselben Geometrieparameters werden als unabhängig voneinander angenommen, ebenso wird von der Unabhängigkeit der Abmessungen eines Teils bzgl. verschiedener Geometrieparameter ausgegangen.

Die Nennmaße (und damit die Erwartungswerte der Zufallsgrößen) der virtuellen Pleuelstangen wurden unter Berücksichtigung der Abmessungen realer Pleuelstangen von kleinen Verbrennungsmotoren (z. B. Go-Kart-Motor) festgelegt. Die Standardabweichungen wurden unter Berücksichtigung der Allgemeintoleranzen nach DIN ISO 2768-1 [DIN 1991] so gewählt, dass die dreifachen Standardabweichungen die Werte der Toleranzklasse *groß* (für die Geometrieparameter d_1, d_3, d_4, h_1, h_2) bzw. die Werte der Toleranzklasse *sehr groß* (für die Geometrieparameter d_2, l, b) nicht überschreiten. Da die meisten Pleuelstangen

hinsichtlich ihrer tatsächlichen Abmessung bzgl. eines Geometrieparameters maximal um die dreifache Standardabweichung vom jeweiligen Nennmaß abweichen, liegen die meisten Abmessungen innerhalb der ausgewählten Toleranzgrenzen nach DIN ISO 2768-1. Dies ist an einem Beispiel verdeutlicht: Das Nennmaß μ_{D1} des Geometrieparameters d_1 beträgt 18 mm. Folglich beträgt die maximal zulässige Abweichung nach Toleranzklasse *grob* $\delta_{max} = 0,5$ mm. Der dreifache Wert der Standardabweichung σ_{D1} soll diese zulässige Abweichung nicht überschreiten, also $3 \cdot \sigma_{D1} \leq \delta_{max} = 0,5$ mm. Um diese Bedingung zu erfüllen, wurde $\sigma_{D1} = 0,15$ mm gewählt.

In Tabelle 5.1 sind zu jedem der acht Geometrieparameter die Abmessung der i -ten Pleuelstange sowie die zur Beschreibung der Abmessung genutzte normalverteilte Zufallsgröße inkl. ihres Erwartungswertes und ihrer Standardabweichung zusammengefasst.

Tabelle 5.1: Auflistung der acht Geometrieparameter der Pleuelstange sowie der entsprechenden tatsächlichen Abmessungen einer zufällig ausgewählten i -ten Pleuelstange bzgl. dieser Geometrieparameter. Weiterhin sind die normalverteilten, stochastisch unabhängigen Zufallsgrößen sowie deren Erwartungswerte und Standardabweichungen angegeben, die zur Beschreibung der tatsächlichen Abmessungen der i -ten Pleuelstange dienen.

Geometrie- parameter	Abmessung i -tes Teil	Zufallsgröße i -tes Teil	Erwartungs- wert	Standard- abweichung
d_1	$d_{i 1}$	$D_{i 1}$	$\mu_{D1} = 18$ mm	$\sigma_{D1} = 0,15$ mm
d_2	$d_{i 2}$	$D_{i 2}$	$\mu_{D2} = 30$ mm	$\sigma_{D2} = 0,20$ mm
d_3	$d_{i 3}$	$D_{i 3}$	$\mu_{D3} = 24$ mm	$\sigma_{D3} = 0,15$ mm
d_4	$d_{i 4}$	$D_{i 4}$	$\mu_{D4} = 40$ mm	$\sigma_{D4} = 0,20$ mm
h_1	$h_{i 1}$	$H_{i 1}$	$\mu_{H1} = 7$ mm	$\sigma_{H1} = 0,15$ mm
h_2	$h_{i 2}$	$H_{i 2}$	$\mu_{H2} = 12$ mm	$\sigma_{H2} = 0,15$ mm
l	l_i	L_i	$\mu_L = 100$ mm	$\sigma_L = 0,40$ mm
b	b_i	B_i	$\mu_B = 18$ mm	$\sigma_B = 0,20$ mm

Zusammengefasst dienen somit folgende Zufallsgrößen zur Beschreibung der tatsächlichen Abmessungen der i -ten Pleuelstange bzgl. der acht Geometrieparameter (Geometrieparameter \rightarrow tatsächliche Abmessung der i -ten Pleuelstange \rightarrow Zufallsgröße):

- $d_1 \rightarrow d_{i|1} \rightarrow D_{i|1} \sim \mathcal{N}(\mu_{D1}; \sigma_{D1}^2) = \mathcal{N}(18 \text{ mm}; 0,0225 \text{ mm}^2)$
- $d_2 \rightarrow d_{i|2} \rightarrow D_{i|2} \sim \mathcal{N}(\mu_{D2}; \sigma_{D2}^2) = \mathcal{N}(30 \text{ mm}; 0,0400 \text{ mm}^2)$
- $d_3 \rightarrow d_{i|3} \rightarrow D_{i|3} \sim \mathcal{N}(\mu_{D3}; \sigma_{D3}^2) = \mathcal{N}(24 \text{ mm}; 0,0225 \text{ mm}^2)$

- $d_4 \rightarrow d_{i|4} \rightarrow D_{i|4} \sim \mathcal{N}(\mu_{D4}; \sigma_{D4}^2) = \mathcal{N}(40 \text{ mm}; 0,0400 \text{ mm}^2)$
- $h_1 \rightarrow h_{i|1} \rightarrow H_{i|1} \sim \mathcal{N}(\mu_{H1}; \sigma_{H1}^2) = \mathcal{N}(7 \text{ mm}; 0,0225 \text{ mm}^2)$
- $h_2 \rightarrow h_{i|2} \rightarrow H_{i|2} \sim \mathcal{N}(\mu_{H2}; \sigma_{H2}^2) = \mathcal{N}(12 \text{ mm}; 0,0225 \text{ mm}^2)$
- $l \rightarrow l_i \rightarrow L_i \sim \mathcal{N}(\mu_L; \sigma_L^2) = \mathcal{N}(100 \text{ mm}; 0,1600 \text{ mm}^2)$
- $b \rightarrow b_i \rightarrow B_i \sim \mathcal{N}(\mu_B; \sigma_B^2) = \mathcal{N}(18 \text{ mm}; 0,0225 \text{ mm}^2)$

Im Gegensatz zu den tatsächlichen geometrischen Abmessungen, die zufallsbehaftet sind und sich daher von Pleuelstange zu Pleuelstange unterscheiden, sollen alle in dieser Arbeit betrachteten Teile exakt dieselben Materialeigenschaften aufweisen. Es wird für alle virtuellen Pleuelstangen davon ausgegangen, dass diese aus einem homogen-isotropen Stahl bestehen, der durch die folgenden Materialeigenschaften gekennzeichnet ist:

- Dichte: $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$
- Elastizitätsmodul: $E = 210 \text{ GPa}$
- Poissonzahl: $\nu = 0,3$

5.2 Verwendete Software

Für die Untersuchungen in dieser Arbeit werden neben Standard- bzw. Textverarbeitungssoftware (*MS-Office*-Paket, \LaTeX) hauptsächlich die beiden kommerziellen Programme *COMSOL Multiphysics* (Version 4.3) und *MATLAB* (Version R2012a) genutzt.

Die Finite-Elemente-Software *COMSOL Multiphysics* bzw. deren *Structural Mechanics Module* wird zur numerischen Berechnung von Eigenfrequenzen verwendet. *MATLAB* findet u. a. für einfache Berechnungen von Kennwerten, zur Erstellung von Diagrammen sowie zur Sortierung von Daten Verwendung; außerdem dient *MATLAB* zur Erzeugung von Zufallszahlen sowie zur schrittweisen Regressionsanalyse. Für weitere Informationen zu den Programmen ist auf deren Dokumentationen verwiesen [COMSOL–DOC 2012, MATLAB–DOC 2012].

5.3 Versuchsprogramm

Im Folgenden sind die für die betrachteten Pleuelstangen (siehe Kapitel 5.1) geplanten Untersuchungen aufbauend auf den Ausführungen aus Kapitel 4 umfangreich beschrieben. Die Erläuterungen beziehen sich stellenweise auf einen fiktiven Geometrieparameter y (vgl. Kapitel 5.1) und erfolgen separat für die bereits in Kapitel 4 sowie in folgender Aufzählung genannten Arbeitsschritte:

- 1) *Generierung von Daten* (siehe Kapitel 5.3.1)
- 2) *Kalibrierung* (siehe Kapitel 5.3.2)
- 3) *Validierung* (siehe Kapitel 5.3.3)

Aus Gründen der Übersichtlichkeit sind nur die wesentlichen Punkte aufgeführt. Die Ergebnisse der Untersuchungen sind letztendlich in Kapitel 6 gezeigt und in Kapitel 7 diskutiert.

5.3.1 Generierung von Daten

Im ersten Arbeitsschritt werden Daten für die spätere Kalibrierung bzw. Validierung (siehe Kapitel 5.3.2 bzw. Kapitel 5.3.3) generiert. Diese Daten werden im Folgenden als *Kalibrierdaten* bzw. *Validierdaten* bezeichnet. Die Daten umfassen die tatsächlichen Abmessungen bzgl. der acht Geometrieparameter und die jeweils ersten m Eigenfrequenzen von n zufällig aus der Grundgesamtheit ausgewählten virtuellen Pleuelstangen. Die $n = n_{cal} + n_{val}$ Teile werden in eine *Kalibrierstichprobe* von Umfang n_{cal} (\rightarrow *Kalibrierteile*) sowie eine *Validierstichprobe* von Umfang n_{val} (\rightarrow *Validierteile*) unterteilt.

Zunächst werden die Stichprobenumfänge n_{cal} und n_{val} festgelegt. Um später eine möglichst präzise Kalibrierung und eine aussagekräftige Validierung durchführen zu können, soll die Kalibrierung anhand von $n_{cal} = 600$ und die Validierung anhand von weiteren $n_{val} = 200$ virtuellen Pleuelstangen geschehen. So sind zur Generierung der Kalibrier- bzw. Validierdaten alle tatsächlichen Abmessungen und die jeweils ersten m Eigenfrequenzen von insgesamt $n = n_{cal} + n_{val} = 800$ zufällig ausgewählten Teilen zu bestimmen. Dabei ist zu beachten, dass die ersten $n_{cal} = 600$ Teile die Kalibrierstichprobe und die letzten $n_{val} = 200$ Teile die Validierstichprobe bilden.

Als nächstes werden die tatsächlichen Abmessungen der insgesamt $n = 800$ Pleuelstangen bzgl. der acht Geometrieparameter bestimmt bzw. mit Hilfe von unabhängigen und

normalverteilten Zufallszahlen erzeugt. Diese Zufallszahlen sind als Realisierungen der in Kapitel 5.1 beschriebenen Zufallsgrößen zu verstehen. Folglich finden zur Ermittlung der Zufallszahlen die entsprechenden Erwartungswerte und Standardabweichungen (jeweils in der Einheit mm) der Zufallsgrößen Verwendung. Beispielsweise wird für den fiktiven Geometrieparameter y mit folgendem *MATLAB*-Befehl ein Zeilenvektor erzeugt, der aus $n = 800$ zufälligen mit dem Erwartungswert μ_Y (*MATLAB*-Variable: `muY`) und der Standardabweichung σ_Y (*MATLAB*-Variable: `sigmaY`) normalverteilten Werten y_1, \dots, y_{800} (*MATLAB*-Variable: `y`) besteht:

- `y = normrnd(muY,sigmaY,1,800);`

Die Werte y_1, \dots, y_{800} entsprechen den tatsächlichen Abmessungen der $n = 800$ Teile bzgl. des Geometrieparameters y . Solche Zufallszahlen werden für jeden der acht Geometrieparameter erzeugt und in separate Textdateien (ASCII-Codierung) exportiert.

Im nächsten Schritt werden die Eigenfrequenzen der per Zufallszahlen geometrisch exakt definierten $n = 800$ virtuellen Teile numerisch mit der *Finite-Elemente-Methode* bestimmt. Dazu dient die Software *COMSOL Multiphysics*, mit der Eigenfrequenzstudien dreidimensionaler Modelle ohne Materialdämpfung durchgeführt werden. Die dazu genutzten Einstellungen sind im Folgenden beschrieben.

Zunächst werden alle acht Geometrieparameter als Parameter in der Software definiert. Den Parametern werden die entsprechenden Nennmaße zugewiesen (siehe Kapitel 5.1). Anschließend wird die Nenngeometrie unter Verwendung elementarer Körper (Zylinder, Block) und boolescher Operationen (Vereinigung, Differenz) in Abhängigkeit der zuvor definierten Parameter aufgebaut (siehe Abbildung 5.2). Weiterhin werden die für alle Teile konstanten Materialkennwerte (siehe Kapitel 5.1) der Geometrie zugewiesen. Der aufgebaute Körper wird als frei schwebend definiert. Es sind also keine weiteren Randbedingungen (z. B. Lager, Einspannung) zu beachten. Schließlich wird die Geometrie vernetzt. Dabei wird von einer Ansatzfunktion zweiter Ordnung (quadratische Ansatzfunktion) ausgegangen. Die Vernetzung (siehe Abbildung 5.2) erfolgt schließlich mit freien Tetraederelementen und den folgenden Vernetzungseinstellungen, die einen Kompromiss zwischen Genauigkeit der Ergebnisse und Rechenaufwand ermöglichen:

- *Maximum element size:* 1,1 mm
- *Resolution of curvature:* 10
- *Minimum element size:* 0,01 mm
- *Resolution of narrow regions:* 1
- *Maximum element growth rate:* 1,2

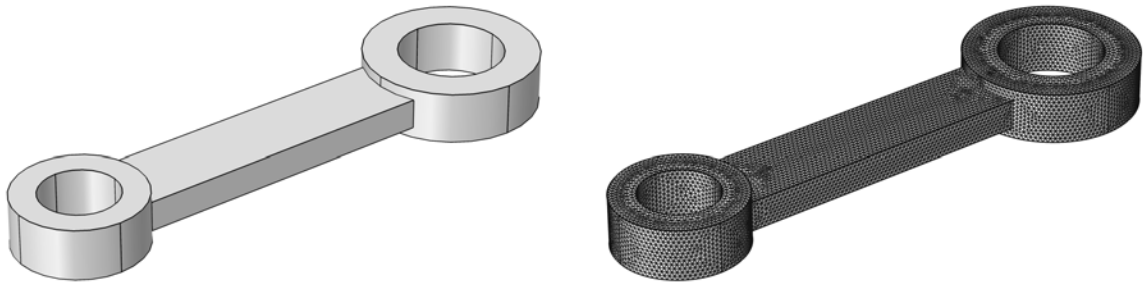


Abbildung 5.2: Darstellung der mit elementaren Körpern (Zylinder, Block) und booleschen Operatoren (Vereinigung, Differenz) in *COMSOL Multiphysics* aufgebauten Geometrie (links) sowie der entsprechenden Vernetzung (rechts) einer Pleuelstange

Um die geometrieabhängigen Eigenfrequenzen der $n = 800$ Pleuelstangen zu ermitteln, wird in *COMSOL Multiphysics* festgelegt, dass wiederholte Eigenfrequenzberechnungen unter Variation der Werte der zuvor definierten Parameter durchgeführt werden. Konkret werden allen Parametern die entsprechenden in Textdateien exportierten Zufallszahlen per Copy & Paste zugewiesen. Die Software berücksichtigt diese nacheinander und passt damit die Geometrie schrittweise vor jeder neuen Berechnung an. Weiterhin wird festgelegt, dass für jedes Teil 50 Eigenfrequenzen um eine Frequenz von 5 kHz gesucht werden sollen. Daraufhin können die Eigenfrequenzberechnungen gestartet werden.

Im Anschluss an die Berechnungen werden die tatsächlichen Abmessungen bzgl. der acht Geometrieparameter (in der Einheit mm) und die davon abhängigen Eigenfrequenzen (in der Einheit kHz) aller $n = 800$ virtuellen Teile in eine gemeinsame Textdatei (ASCII-Codierung) exportiert. Eine solche tabellenförmig aufgebaute Datei beinhaltet in einer Spalte die jeweils 50 berechneten Eigenfrequenzen aller Teile. In weiteren acht Spalten finden sich die zu den Eigenfrequenzberechnungen genutzten Abmessungen bzgl. der acht Geometrieparameter. In jeder Zeile der Datei sind eine Eigenfrequenz und die zugehörigen Abmessungen eines virtuellen Teils enthalten; die Daten beinhalten dieselben Abmessungen also vielfach.

Vor der Kalibrierung bzw. Validierung sind die Daten aufzuteilen, umzusortieren und um redundante oder nicht relevante Informationen zu reduzieren, um sie in ein geeignetes Format zu überführen. Dazu werden zunächst mit der Software *Excel* Spaltenüberschriften und Leerspalten entfernt. Anschließend werden die Daten in *MATLAB* importiert. Dort wird für jeden Geometrieparameter ein separater Spaltenvektor erzeugt. Ein solcher Vektor beinhaltet (nachdem redundante Abmessungen entfernt wurden) die Abmessungen der $n = 800$ virtuellen Teile bzgl. eines Geometrieparameters. Die Eigenfrequenzen

werden so in einer 800×50 -Matrix abgelegt, dass jeweils zeilenweise die 50 berechneten Eigenfrequenzen für eines der $n = 800$ virtuellen Teile aufsteigend sortiert vorliegen. Da *COMSOL Multiphysics* bei Verwendung der gewählten Einstellungen bei jeder Eigenfrequenzberechnung sechs Starrkörpermoden (bei ca. 0 Hz) ermittelt, die für diese Arbeit keine relevanten Informationen darstellen, werden die entsprechenden Frequenzen aus der Matrix eliminiert. Da die akustische Resonanzanalyse in der Praxis meist auf niedrigere Frequenzen fokussiert, werden zunächst nur Eigenfrequenzen bis 30 kHz genutzt. Daher werden alle Spalten mit einem höheren Frequenzwert als 30 kHz aus der Matrix entfernt, sodass diese sich auf eine Größe von 800×17 reduziert. Es werden im weiteren Verlauf also maximal die ersten $m = 17$ Eigenfrequenzen genutzt.

Letztendlich werden die Daten also so geordnet bzw. um redundante Informationen reduziert, dass die acht Spaltenvektoren an ihren i -ten Stellen (mit $i = 1, \dots, 800$) die Abmessungen bzgl. aller Geometrieparameter beinhalten, auf Basis derer die in der i -ten Zeile der Matrix abgelegten $m = 17$ Eigenfrequenzen berechnet wurden. Die ersten $n_{cal} = 600$ Zeilen bzw. Elemente der Matrix und der Spaltenvektoren bilden die anhand der Kalibrierstichprobe ermittelten Kalibrierdaten, die letzten $n_{val} = 200$ Zeilen bzw. Elemente die anhand der Validierstichprobe ermittelten Validierdaten (siehe Abbildung 5.3).

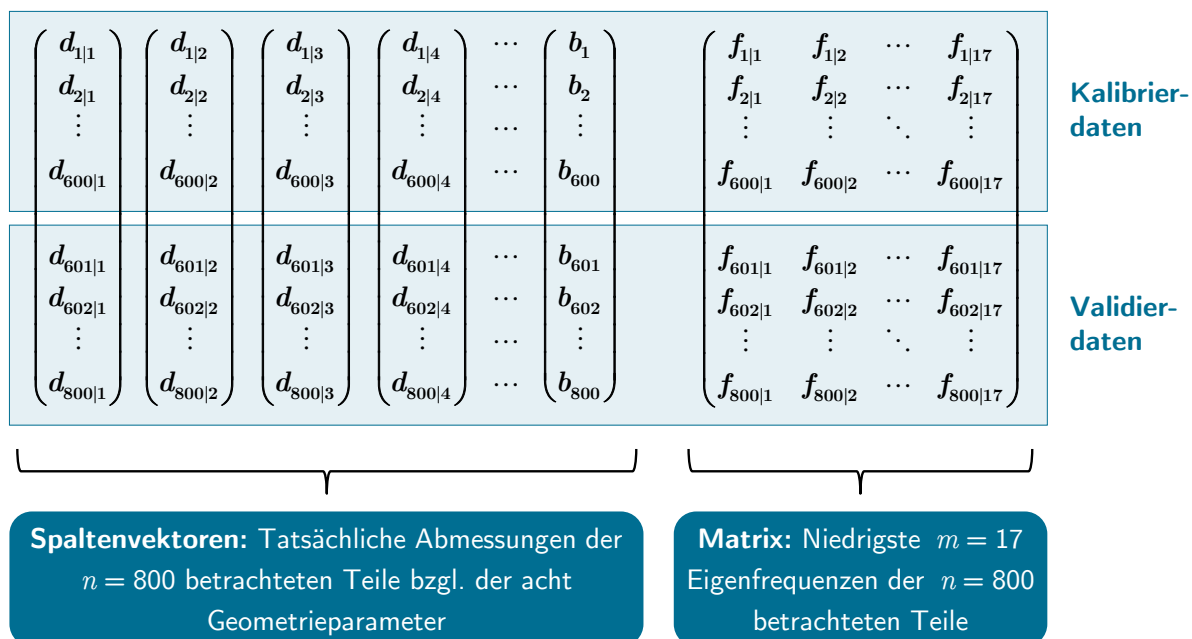


Abbildung 5.3: Schematische Darstellung der Kalibrier- bzw. Validierdaten. In den Spaltenvektoren sind die tatsächlichen Abmessungen der $n = 800$ Teile bzgl. der acht Geometrieparameter enthalten. In der Matrix sind zeilenweise die entsprechenden jeweils ersten $m = 17$ numerisch berechneten Eigenfrequenzen der $n = 800$ Teile abgelegt. Die ersten $n_{cal} = 600$ Zeilen bzw. Elemente bilden die Kalibrier-, die letzten $n_{val} = 200$ Zeilen bzw. Elemente die Validierdaten.

Zur Veranschaulichung der numerisch berechneten Eigenfrequenzen und Eigenmoden der Pleuelstangen sind in Anhang A.3 exemplarisch die ersten $m = 17$ ermittelten Eigenmoden und Eigenfrequenzen einer Pleuelstange mit Nennmaßen gezeigt. Außerdem sind dort die Wertebereiche der ersten $m = 17$ Eigenfrequenzen der $n = 800$ Pleuelstangen in Abhängigkeit ihrer (mit Zufallszahlen beschriebenen) tatsächlichen Abmessungen gezeigt.

5.3.2 Kalibrierung

Im zweiten Arbeitsschritt wird für jeden Geometrieparameter ein geeigneter Zusammenhang zwischen dem Geometrieparameter als Zielgröße sowie den entsprechenden Eigenfrequenzen als Eingangsgrößen auf Basis der Kalibrierdaten (siehe Kapitel 5.3.1) mit schrittweiser Regressionsanalyse (siehe Kapitel 3) bestimmt. Da eine solche Kalibrierung für jeden der acht Geometrieparameter der Pleuelstangen erforderlich ist, beziehen sich die folgenden Ausführungen stellvertretend auf einen fiktiven Geometrieparameter y .

Es wird von der Modellvorstellung ausgegangen, dass die tatsächliche Abmessung y_i einer zufällig aus der Grundgesamtheit ausgewählten i -ten Pleuelstange (mit $i = 1, \dots, N$) bzgl. des Geometrieparameters y wie in Gl. (5.1) gezeigt mit Hilfe einer linearen Funktion g unter Berücksichtigung der ersten $m = 17$ Eigenfrequenzen $f_{i|1}, \dots, f_{i|17}$ hinreichend genau (mit geringem Fehler ϵ_i) abgeschätzt werden kann.

$$y_i = g(f_{i|1}, \dots, f_{i|17}) + \epsilon_i \quad (5.1)$$

Insbesondere wird von einer linearen Modellgleichung mit einer Konstanten α_0 sowie k linearen Termen $\alpha_1 \cdot f_{i|1}, \dots, \alpha_{17} \cdot f_{i|17}, \alpha_{1|2} \cdot f_{i|1} \cdot f_{i|2}, \alpha_{1|3} \cdot f_{i|1} \cdot f_{i|3}, \dots, \alpha_{16|17} \cdot f_{i|16} \cdot f_{i|17}$ ausgegangen. Die Koeffizienten $\alpha_1, \dots, \alpha_{17}, \alpha_{1|2}, \alpha_{1|3}, \dots, \alpha_{16|17}$ stellen dabei konstante Faktoren dar und die Variablen $f_{i|1}, \dots, f_{i|17}$ stehen für die ersten $m = 17$ Eigenfrequenzen. Neben den Eigenfrequenzen selbst werden auch Produktterme aus zwei verschiedenen Eigenfrequenzen berücksichtigt. Eine entsprechende Modellgleichung ist in Gl. (5.2) gezeigt.

$$\begin{aligned} y_i = & \alpha_0 + \alpha_1 \cdot f_{i|1} + \dots + \alpha_{17} \cdot f_{i|17} + \alpha_{1|2} \cdot f_{i|1} \cdot f_{i|2} \\ & + \alpha_{1|3} \cdot f_{i|1} \cdot f_{i|3} + \dots + \alpha_{16|17} \cdot f_{i|16} \cdot f_{i|17} + \epsilon_i \end{aligned} \quad (5.2)$$

Mit Hilfe der Kalibrierdaten werden anschließend Schätzwerte für die Konstante α_0 und die k Koeffizienten $\alpha_1, \dots, \alpha_{17}, \alpha_{1|2}, \alpha_{1|3}, \dots, \alpha_{16|17}$ des in Gl. (5.2) gezeigten Modells ermittelt. Die entsprechenden Schätzwerte sind mit $\hat{\alpha}_0$ bzw. $\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_{17}, \hat{\alpha}_{1|2}, \hat{\alpha}_{1|3}, \dots, \hat{\alpha}_{16|17}$,

die resultierende, in Gl. (5.3) gezeigte Funktion als *Regressionsfunktion* bezeichnet. Mit dieser kann schließlich für eine zufällig aus der Grundgesamtheit ausgewählte i -te Pleuelstange unter Berücksichtigung ihrer Eigenfrequenzen $f_{i|1}, \dots, f_{i|17}$ ein Schätzwert \hat{y}_i für ihre tatsächliche Abmessung y_i bzgl. des Geometrieparameters y errechnet werden.

$$\begin{aligned} \hat{y}_i = & \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 \cdot f_{i|1} + \dots + \hat{\alpha}_{17} \cdot f_{i|17} + \hat{\alpha}_{1|2} \cdot f_{i|1} \cdot f_{i|2} \\ & + \hat{\alpha}_{1|3} \cdot f_{i|1} \cdot f_{i|3} + \dots + \hat{\alpha}_{16|17} \cdot f_{i|16} \cdot f_{i|17} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Die Schätzungen der Modellparameter erfolgen nach der *Methode der kleinsten Quadrate*. Dabei wird die Summe der Quadrate der Differenzen $e_1 = y_1 - \hat{y}_1, \dots, e_{600} = y_{600} - \hat{y}_{600}$ zwischen den tatsächlichen Abmessungen y_1, \dots, y_{600} der $n_{cal} = 600$ Kalibrierteile und den entsprechenden Schätzwerten $\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_{600}$ minimiert. Weiterhin sei angemerkt, dass nicht zwangsläufig alle $m = 17$ Eigenfrequenzen sowie alle möglichen paarweisen Produkte als Eingangsgrößen in einer Regressionsfunktion berücksichtigt werden, wie die obigen Gleichungen vermuten lassen. Es erfolgt vielmehr eine Auswahl der signifikanten Eingangsgrößen mit einem schrittweisen, auf partiellen F -Tests basierenden Algorithmus. Details zur Schätzung der Modellparameter, zur schrittweisen Regression sowie zur Regressionsanalyse selbst finden sich in Kapitel 3.

Nicht zuletzt wird darauf hingewiesen, dass das zuvor beschriebene Modell im Wesentlichen dem Standardmodell der multiplen linearen Regression entspricht. Für ein solches Modell bzw. für die auf Basis eines solchen Modells durchgeführte Regressionsanalyse müssen gewisse Annahmen erfüllt sein. Die geforderten Annahmen sind in Kapitel 3.4 beschrieben. Falls die Annahmen verletzt werden, können unerwünschte Effekte auftreten, auf die an dieser Stelle aber nicht näher eingegangen wird. Das verwendete Modell wird jedoch im Rahmen der Diskussion in Kapitel 7.2 analysiert.

Zur Kalibrierung selbst, also zur schrittweisen Regressionsanalyse, dient die Software *MATLAB*. Im Folgenden ist der entsprechende *MATLAB*-Befehl zur schrittweisen Ermittlung eines Modells (*MATLAB*-Variable: `mdly`) sowie einer konkreten Regressionsfunktion exemplarisch für den fiktiven Geometrieparameter y gezeigt:

- `mdly = LinearModel.stepwise(F(1:600,:), y(1:600), 'constant', 'Upper', 'interactions', 'NSteps', 20, 'Penter', 0.05, 'PRemove', 0.1)`

In diesem Befehl werden die Kalibrierdaten genutzt, also die tatsächlichen Abmessungen y_1, \dots, y_{600} (*MATLAB*-Variable: `y(1:600)`) der $n_{cal} = 600$ Kalibrierteile bzgl. des Geometrieparameters y sowie die jeweils ersten $m = 17$ Eigenfrequenzen (*MATLAB*-Variable:

$F(1:600)$) derselben Teile. Das Modell beinhaltet zu Beginn der Prozedur lediglich eine Konstante (*MATLAB*-Argument: 'constant'), das resultierende Modell darf neben der Konstanten einzelne Eigenfrequenzen sowie paarweise Produkte aus bereits einzeln aufgenommenen Eigenfrequenzen als zusätzliche Eingangsgrößen enthalten (*MATLAB*-Argument: 'Upper', 'interactions'). Die schrittweise Regression umfasst maximal 20 Schritte, bei welchen ein zusätzlicher Term ins Modell aufgenommen oder ein zuvor aufgenommenener Term wieder entfernt werden kann (*MATLAB*-Argument: 'NSteps', 20). Dadurch wird die Anzahl der abschließend zu schätzenden Parameter auf maximal 21 (inklusive der Konstanten) beschränkt. Das schrittweise Erweitern bzw. Reduzieren des Modellansatzes um einen Term erfolgt auf Basis partieller F -Tests mit den Signifikanzniveaus $\alpha_{enter} = 0.05$ für die Aufnahme bzw. $\alpha_{remove} = 0.1$ für das Entfernen eines Terms (*MATLAB*-Argument: 'Penter', 0.05, 'PRemove', 0.1). Obiger *MATLAB*-Befehl nutzt den in folgender Aufzählung beschriebenen, auf partiellen F -Tests (siehe Kapitel 3.3) basierenden Algorithmus zur Wahl der im endgültigen Modell zu berücksichtigenden Eingangsgrößen [MATLAB-DOC 2012]. Außerdem werden solche Eingangsgrößen aus dem Modell entfernt bzw. nicht in das Modell aufgenommen werden, deren Werte stark mit den Werten einer anderen Eingangsgröße korrelieren und damit redundant sind.

- 1) Die Modellparameter des Ausgangsmodells werden geschätzt.
- 2) Das Modell wird um die Eingangsgröße mit dem geringsten p -Wert (aus allen partiellen F -Tests für die bisher nicht im Modell berücksichtigten Eingangsgrößen) erweitert, sofern dieser p -Wert kleiner als das Signifikanzniveau α_{enter} ist. Nach Aufnahme einer Eingangsgröße wird dieser Schritt mit dem erweiterten Modell wiederholt. Kann keine Eingangsgröße aufgenommen werden, wird die Prozedur im dritten Schritt fortgesetzt.
- 3) Das Modell wird um die Eingangsgröße mit dem höchsten p -Wert (aus allen partiellen F -Tests für die im Modell berücksichtigten Eingangsgrößen) reduziert, sofern dieser p -Wert größer als das Signifikanzniveau α_{remove} ist. Nach Entfernen einer Eingangsgröße wird der zweite Schritt mit dem reduzierten Modell wiederholt. Kann keine Eingangsgröße entfernt werden, wird die Prozedur beendet.

5.3.3 Validierung

Im dritten Arbeitsschritt wird für jeden Geometrieparameter der bei der Kalibrierung (siehe Kapitel 5.3.2) ermittelte Zusammenhang mit Hilfe verschiedener, auf Basis der Kalibrier- sowie der Validierdaten (siehe Kapitel 5.3.1) abgeleiteter Kenngrößen und Diagramme überprüft. Eine solche Validierung ist für jeden der acht Geometrieparameter der Pleuelstangen erforderlich, daher beziehen sich die folgenden Ausführungen wiederum stellvertretend auf einen fiktiven Geometrieparameter y .

Es sei darauf hingewiesen, dass die Validierung dazu dient, die vorgeschlagene eigenfrequenzbasierte Geometrieabschätzung zu bewerten. Es soll also untersucht werden, wie genau die tatsächlichen Abmessungen einer zufällig ausgewählten Pleuelstange anhand ihrer Eigenfrequenzen mit Hilfe der bei der Kalibrierung gebildeten Regressionsfunktionen abgeschätzt werden können. Eine umfassende Modellvalidierung, bei der die Korrektheit der Modellannahmen (siehe Kapitel 3.4) analysiert wird, ist nicht Gegenstand der Validierung. Das Modell aus Kapitel 5.3.2 wird jedoch später (siehe Kapitel 7.2) diskutiert.

Zunächst werden zur Validierung der Regressionsfunktion des fiktiven Geometrieparameters y das Bestimmtheitsmaß R^2 sowie das korrigierte Bestimmtheitsmaß \bar{R}^2 herangezogen. Diese resultieren aus der jeweiligen Kalibrierung (also aus der schrittweisen Regressionsanalyse bzw. ihrem finalen Schritt). Hohe Werte für das Bestimmtheitsmaß R^2 bzw. das korrigierte Bestimmtheitsmaß \bar{R}^2 deuten darauf hin, dass das Modell bzw. die ermittelte Regressionsfunktion des Geometrieparameters y geeignet ist, um näherungsweise auf die tatsächliche Abmessung y_i einer zufällig aus der Grundgesamtheit ausgewählten i -ten Pleuelstange (mit $i = 1, \dots, N$) zu schließen. Für weiterführende Informationen zum (korrigierten) Bestimmtheitsmaß wird auf Kapitel 3.2 verwiesen. Das bei der Kalibrierung nach Kapitel 5.3.2 für das Modell (*MATLAB*-Variable: `mdly`) bzw. für die Regressionsfunktion des fiktiven Geometrieparameters y ermittelte Bestimmtheitsmaß R^2 (*MATLAB*-Variable: `R2`) und das korrigierte Bestimmtheitsmaß \bar{R}^2 (*MATLAB*-Variable: `R2adj`) werden mit folgenden *MATLAB*-Befehlen ausgegeben:

- `R2 = mdly.Rsquared.Ordinary`
- `R2adj = mdly.Rsquared.Adjusted`

Darüber hinaus werden Kennwerte ermittelt und Diagramme erzeugt, die im Wesentlichen die Differenzen und den linearen Zusammenhang zwischen den tatsächlichen Abmessungen y_1, \dots, y_{800} der Pleuelstangen bzgl. des Geometrieparameters y sowie den entsprechenden

Schätzwerten $\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_{800}$ charakterisieren. Die dazu erforderlichen Schätzwerte $\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_{800}$ (*MATLAB*-Variable: `ypred`) für die tatsächlichen Abmessungen y_1, \dots, y_{800} aller $n = 800$ virtuellen Teile werden mit Hilfe des entsprechenden Modells (*MATLAB*-Variable: `mdly`) bzw. der entsprechenden Regressionsfunktion unter Berücksichtigung der jeweils ersten $m = 17$ Eigenfrequenzen (*MATLAB*-Variable: `F`) wie folgt ermittelt:

- `ypred = predict(mdly,F);`

Daraufhin werden die in Tabelle 5.2 zusammengefassten Kennwerte zur Charakterisierung der Differenzen $e_i = y_i - \hat{y}_i$ und des linearen Zusammenhangs zwischen den tatsächlichen Abmessungen y_i sowie den Schätzwerten \hat{y}_i berechnet. Die Kennwerte werden dabei getrennt mit den Kalibrierdaten (also mit $i = 1, \dots, 600$ und $n_* = n_{cal} = 600$) sowie den Validierdaten (also mit $i = 601, \dots, 800$ und $n_* = n_{val} = 200$) ermittelt. Die zur Umsetzung genutzten *MATLAB*-Befehle sind ebenso in Tabelle 5.2 angegeben.

Die ersten vier der in Tabelle 5.2 angegebenen Kennwerte werden zum einen absolut (in mm) und zum anderen relativ (in %) in Bezug auf den sechsfachen Wert der Standardabweichung σ_Y des Geometrieparameters y angegeben. Dazu werden die Kennwerte durch den sechsfachen Wert der Standardabweichung σ_Y dividiert und anschließend mit 100 % multipliziert. Die sechsfache Standardabweichung (jeweils dreifache Standardabweichung in beide Richtungen um den Erwartungswert) deckt die meisten (ca. 99,7 %, siehe Anhang A.4.1) der möglichen Abmessungen ab. Daher charakterisieren die prozentual angegebenen Kennwerte die Differenzen zwischen den Schätzwerten und den tatsächlichen Abmessungen bezogen auf den wesentlichen Wertebereich des Geometrieparameters y . Die für eine solche Normierung erforderlichen Standardabweichungen der acht Geometrieparameter finden sich in Kapitel 5.1.

Niedrige Werte der ersten vier in Tabelle 5.2 aufgelisteten Kennwerte bzw. hohe Werte des Korrelationskoeffizienten deuten darauf hin, dass das verwendete Modell bzw. die ermittelte Regressionsfunktion des fiktiven Geometrieparameters y geeignet ist, um näherungsweise auf die entsprechende tatsächliche Abmessung y_i einer zufällig aus der Grundgesamtheit ausgewählten i -ten Pleuelstange (mit $i = 1, \dots, N$) zu schließen. Da die Kennwerte jeweils auf Basis der Kalibrier- sowie der Validierdaten berechnet werden, ist ein Vergleich entsprechender Kennwerte möglich. Dies erlaubt eine Überprüfung dahingehend, ob eine bei der Kalibrierung ermittelte Regressionsfunktion für neue, nicht bei der Kalibrierung betrachtete Teile zu vergleichbar sinnvollen Schätzwerten für die unbekanntenen tatsächlichen Abmessungen führt.

Tabelle 5.2: Auflistung der bei der Validierung genutzten Kennwerte zur Charakterisierung der Differenzen $e_i = y_i - \hat{y}_i$ sowie des linearen Zusammenhangs zwischen den tatsächlichen Abmessungen y_i bzgl. des Geometrieparameters y sowie den entsprechenden Schätzwerten \hat{y}_i . Sämtliche Kennwerte werden jeweils separat für die Teile der Kalibrierstichprobe ($i = 1, \dots, 600$ und $n_* = n_{cal} = 600$) sowie die Teile des Validierstichprobe ($i = 601, \dots, 800$ und $n_* = n_{val} = 200$) ermittelt. Neben der Bezeichnung der Kennwerte sind jeweils eine mathematische Beschreibung sowie die zur Umsetzung genutzten *MATLAB*-Befehle angegeben (*MATLAB*-Variable für die tatsächlichen Werte: y , *MATLAB*-Variable für die Schätzwerte: y_{pred}).

Kennwert	Mathematische Beschreibung (mit $e_i = y_i - \hat{y}_i$) bzw. <i>MATLAB</i> -Befehle zur Berechnung der Kennwerte
Mittelwert \bar{e}	$\bar{e} = \frac{1}{n_*} \sum_{i=1}^{n_*} e_i$ $\text{mean}(y(1:600)-ypred(1:600))$ $\text{mean}(y(601:800)-ypred(601:800))$
Standardabweichung s_e	$s_e = \sqrt{\frac{1}{n_*-1} \sum_{i=1}^{n_*} (e_i - \bar{e})^2}$ $\text{std}(y(1:600)-ypred(1:600))$ $\text{std}(y(601:800)-ypred(601:800))$
Mittlerer Fehler $ \bar{e} $	$\bar{e}_{abs} = \frac{1}{n_*} \sum_{i=1}^{n_*} e_i $ $\text{mean}(\text{abs}(y(1:600)-ypred(1:600)))$ $\text{mean}(\text{abs}(y(601:800)-ypred(601:800)))$
Maximalfehler $ e_i _{max}$	$ e_i _{max} = \max e_i $ $\text{max}(\text{abs}(y(1:600)-ypred(1:600)))$ $\text{max}(\text{abs}(y(601:800)-ypred(601:800)))$
Korrelationskoeffizient r	mathematische Beschreibung: Gl. (A.21), Anhang A.4.3 $\text{corrcoeff}(y(1:600), ypred(1:600))$ $\text{corrcoeff}(y(601:800), ypred(601:800))$

Darüber hinaus werden für ausgewählte Teile die Fehler $|e_i|$ (also die Beträge der Differenzen e_i) zwischen tatsächlichen Abmessungen und Schätzwerten ermittelt und (prozentual wie oben beschrieben) angegeben. Die Motivation besteht dabei vor allem in der Identifikation solcher Validierteile, für welche große Fehler $|e_i|$ beobachtet werden können.

Wie bereits erwähnt, können die Differenzen $e_i = y_i - \hat{y}_i$ (und der lineare Zusammenhang) zwischen den tatsächlichen Abmessungen y_i bzgl. des Geometrieparameters y sowie den entsprechenden Schätzwerten \hat{y}_i auch anhand von Diagrammen beurteilt werden. Zur grafischen Validierung werden in dieser Arbeit die in folgender Auflistung genannten Diagramme genutzt, die analog zu den Kennwerten jeweils separat für die Kalibrierteile (also mit $i = 1, \dots, 600$) sowie für die Validierteile (also mit $i = 601, \dots, 800$) dargestellt werden:

- Die tatsächlichen Abmessungen y_i bzgl. des Geometrieparameters y und die entsprechenden Schätzwerte \hat{y}_i (y -Achse) werden in zwei unterschiedlichen Farben über der Teilenummer i (x -Achse) dargestellt. Aus Gründen der Übersichtlichkeit sind dazu nur die jeweils ersten 50 Teile betrachtet (Kalibrierteile: $i = 1, \dots, 50$; Validierteile: $i = 601, \dots, 650$). Mit Hilfe dieser Diagramme ist direkt ersichtlich, inwiefern tatsächliche Werte und Schätzwerte übereinstimmen. Die Diagramme werden mit a_{cal} (für die Kalibrierteile) bzw. a_{val} (für die Validierteile) bezeichnet.
- Die tatsächlichen Abmessungen y_i (x -Achse) bzgl. des Geometrieparameters y und die zugehörigen Schätzwerte \hat{y}_i (y -Achse) werden in einem gemeinsamen Diagramm dargestellt. Dabei werden alle Teile betrachtet (Kalibrierteile: $i = 1, \dots, 600$; Validierteile: $i = 601, \dots, 800$). Auf diese Weise ist der lineare Zusammenhang zwischen tatsächlichen Werten und Schätzwerten ersichtlich. Die Diagramme werden mit b_{cal} (für die Kalibrierteile) bzw. b_{val} (für die Validierteile) bezeichnet.
- Die Differenzen $e_i = y_i - \hat{y}_i$ (y -Achse) zwischen den tatsächlichen Abmessungen y_i bzgl. des Geometrieparameters y und den entsprechenden Schätzwerten \hat{y}_i werden über der Teilenummer i (x -Achse) dargestellt. Dazu werden alle Teile genutzt (Kalibrierteile: $i = 1, \dots, 600$; Validierteile: $i = 601, \dots, 800$). So können die Größenordnungen der Differenzen beurteilt werden. Die Diagramme werden mit c_{cal} (für die Kalibrierteile) bzw. c_{val} (für die Validierteile) bezeichnet.
- Die Differenzen $e_i = y_i - \hat{y}_i$ zwischen den tatsächlichen Abmessungen y_i bzgl. des Geometrieparameters y und den entsprechenden Schätzwerten \hat{y}_i werden in einem Histogramm dargestellt. Dazu werden alle Teile genutzt (Kalibrierteile: $i = 1, \dots, 600$; Validierteile: $i = 601, \dots, 800$). So kann die Verteilung der Differenzen bewertet werden. Die Diagramme werden mit d_{cal} (für die Kalibrierteile) bzw. d_{val} (für die Validierteile) bezeichnet.

6 Ergebnisse

In Kapitel 6.1 bis Kapitel 6.8 werden die ausführlichen Ergebnisse der in Kapitel 5 beschriebenen Untersuchungen separat für jeden der acht Geometrieparameter der Pleuelstange (siehe Kapitel 5.1) dargestellt. In Kapitel 6.9 sind abschließend alle Ergebnisse zusammenfassend beschrieben. Die Diskussion der Untersuchungen bzw. der gezeigten Ergebnisse findet sich schließlich in Kapitel 7. Jedes der Kapitel 6.1 bis 6.8 ist einheitlich wie folgt aufgebaut:

- Zunächst wird die bei der Kalibrierung (siehe Kapitel 5.3.2) bestimmte Regressionsfunktion gezeigt, die unter Berücksichtigung der ersten $m = 17$ Eigenfrequenzen $f_{i|1}, \dots, f_{i|17}$ einer zufällig ausgewählten i -ten Pleuelstange zur Abschätzung ihrer tatsächlichen Abmessung bzgl. des betrachteten Geometrieparameters dient. Dabei stehen die Variablen $\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_{17}, \hat{\alpha}_{1|2}, \hat{\alpha}_{1|3}, \dots, \hat{\alpha}_{16|17}$ stellvertretend für die Schätzwerte der in der Regressionsfunktion berücksichtigten Modellparameter. Die konkreten Schätzwerte finden sich jedoch aus Gründen der Übersichtlichkeit in Anhang A.5. Zusätzlich sind die aus der Kalibrierung resultierenden Werte für das Bestimmtheitsmaß R^2 sowie das korrigierte Bestimmtheitsmaß \bar{R}^2 angegeben (vgl. Kapitel 5.3.3).
- In einer Tabelle sind die in Tabelle 5.2 (Kapitel 5.3.3) aufgelisteten Kennwerte wiedergegeben. In einer Abbildung werden die in Kapitel 5.3.3 beschriebenen Diagramme gezeigt. Die Kennwerte sowie die Diagramme dienen zur Charakterisierung der Differenzen und des linearen Zusammenhangs zwischen den tatsächlichen Abmessungen aller virtuellen Teile bzgl. des betrachteten Geometrieparameters sowie den entsprechenden mit Hilfe der Regressionsfunktion ermittelten Schätzwerten. Sowohl die Kennwerte als auch die Diagramme sind getrennt für die $n_{cal} = 600$ virtuellen Kalibrierteile (Teilenummer $i = 1, \dots, 600$) bzw. die $n_{val} = 200$ virtuellen Validierteile (Teilenummer $i = 601, \dots, 800$) ermittelt. Für weitere Informationen zur Bedeutung und Interpretation der Kennwerte und der Diagramme wird auf Kapitel 5.3.3 verwiesen.

6.1 Geometrieparameter d_1

Zur Ermittlung eines Schätzwertes $\hat{d}_{i|1}$ für die tatsächliche Abmessung $d_{i|1}$ einer zufällig ausgewählten i -ten Pleuelstange bzgl. des Geometrieparameters d_1 wurde im Rahmen der Kalibrierung die in Gl. (6.1) angegebene Regressionsfunktion bestimmt. In dieser sind neben einer Konstanten weitere $k = 20$ Terme berücksichtigt (8 der ersten $m = 17$ Eigenfrequenzen $f_{i|1}, \dots, f_{i|16}$ und 12 Produktterme). Die konkreten Schätzwerte der in der Regressionsfunktion berücksichtigten Modellparameter sind in Anhang A.5.1 gezeigt. Aus der Kalibrierung resultiert weiterhin ein Bestimmtheitsmaß von $R^2 = 0,99948$ (korrigiertes Bestimmtheitsmaß: $\bar{R}^2 = 0,99947$).

$$\begin{aligned}
 \hat{d}_{i|1} = & + \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 \cdot f_{i|1} + \hat{\alpha}_3 \cdot f_{i|3} + \hat{\alpha}_5 \cdot f_{i|5} + \hat{\alpha}_7 \cdot f_{i|7} + \hat{\alpha}_{12} \cdot f_{i|12} + \hat{\alpha}_{13} \cdot f_{i|13} + \hat{\alpha}_{15} \cdot f_{i|15} \\
 & + \hat{\alpha}_{17} \cdot f_{i|17} + \hat{\alpha}_{1|5} \cdot f_{i|1} \cdot f_{i|5} + \hat{\alpha}_{1|7} \cdot f_{i|1} \cdot f_{i|7} + \hat{\alpha}_{3|7} \cdot f_{i|3} \cdot f_{i|7} + \hat{\alpha}_{3|13} \cdot f_{i|3} \cdot f_{i|13} \\
 & + \hat{\alpha}_{3|15} \cdot f_{i|3} \cdot f_{i|15} + \hat{\alpha}_{5|7} \cdot f_{i|5} \cdot f_{i|7} + \hat{\alpha}_{5|17} \cdot f_{i|5} \cdot f_{i|17} + \hat{\alpha}_{7|13} \cdot f_{i|7} \cdot f_{i|13} \\
 & + \hat{\alpha}_{12|13} \cdot f_{i|12} \cdot f_{i|13} + \hat{\alpha}_{12|15} \cdot f_{i|12} \cdot f_{i|15} + \hat{\alpha}_{13|17} \cdot f_{i|13} \cdot f_{i|17} + \hat{\alpha}_{15|17} \cdot f_{i|15} \cdot f_{i|17}
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

In Tabelle 6.1 bzw. Abbildung 6.1 sind Kennwerte bzw. Diagramme zur Charakterisierung der Differenzen $e_i = d_{i|1} - \hat{d}_{i|1}$ sowie des linearen Zusammenhangs zwischen den tatsächlichen Abmessungen $d_{i|1}$ aller virtuellen Teile bzgl. des Geometrieparameters d_1 und den Schätzwerten $\hat{d}_{i|1}$ dargestellt (vgl. Kapitel 5.3.3). Die Kennwerte und Diagramme sind getrennt für die $n_{cal} = 600$ virtuellen Teile der Kalibrierstichprobe ($i = 1, \dots, 600$) bzw. die $n_{val} = 200$ virtuellen Teile der Validierstichprobe ($i = 601, \dots, 800$) ermittelt.

Tabelle 6.1: Auflistung von Kennwerten zur Charakterisierung der Differenzen $e_i = d_{i|1} - \hat{d}_{i|1}$ sowie des linearen Zusammenhangs zwischen den tatsächlichen Abmessungen $d_{i|1}$ aller virtuellen Teile bzgl. des Geometrieparameters d_1 und den Schätzwerten $\hat{d}_{i|1}$. Die Kennwerte sind separat für die $n_{cal} = 600$ Teile der Kalibrierstichprobe (Teilenummer $i = 1, \dots, 600$) sowie die $n_{val} = 200$ Teile der Validierstichprobe (Teilenummer $i = 601, \dots, 800$) errechnet. Mit Ausnahme des dimensionslosen Korrelationskoeffizienten sind alle Kennwerte absolut (in mm) sowie relativ (in %) in Bezug auf den sechsfachen Wert der Standardabweichung σ_{D1} (siehe Kapitel 5.1, $6 \cdot \sigma_{D1} = 0,9$ mm) angegeben.

Kennwert	Kalibrierstichprobe		Validierstichprobe	
	absolut (mm)	relativ (%)	absolut (mm)	relativ (%)
Mittelwert \bar{e}	$1,5 \cdot 10^{-15}$	$1,7 \cdot 10^{-13}$	-0,0002	-0,022
Standardabweichung s_e	0,0033	0,367	0,0036	0,397
Mittlerer Fehler $ \bar{e} $	0,0024	0,266	0,0025	0,278
Maximalfehler $ e_i _{max}$	0,0181	2,009	0,0193	2,142
Korrelationskoeffizient r	0,99974		0,99966	

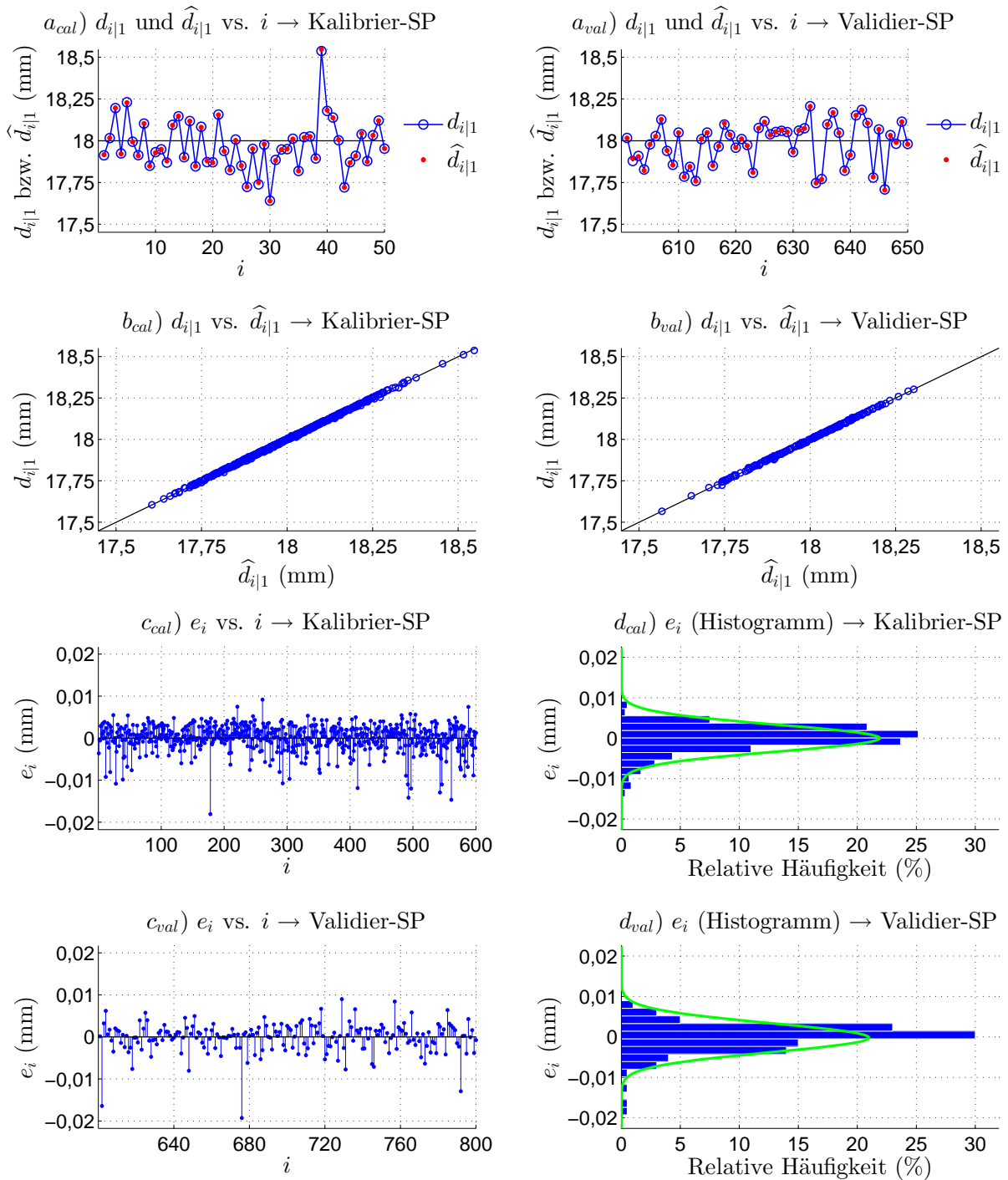


Abbildung 6.1: Darstellung von Diagrammen zur Charakterisierung der Differenzen $e_i = d_{i|1} - \hat{d}_{i|1}$ sowie des linearen Zusammenhangs zwischen den tatsächlichen Abmessungen $d_{i|1}$ aller virtuellen Teile bzgl. des Geometrieparameters d_1 und den Schätzwerten $\hat{d}_{i|1}$. Konkret sind in den Diagrammen a_{cal} bzw. a_{val} die tatsächlichen Abmessungen $d_{i|1}$ sowie die Schätzwerte $\hat{d}_{i|1}$ über der Teilenummer i , in den Diagrammen b_{cal} bzw. b_{val} die tatsächlichen Abmessungen $d_{i|1}$ über den Schätzwerten $\hat{d}_{i|1}$, in den Diagrammen c_{cal} bzw. c_{val} die Differenzen e_i über der Teilenummer i und in den Diagrammen d_{cal} bzw. d_{val} die Verteilung der Differenzen e_i gezeigt. Die Diagramme sind separat für die $n_{cal} = 600$ Teile der Kalibrierstichprobe (Teilenummer $i = 1, \dots, 600$) sowie die $n_{val} = 200$ Teile der Validierstichprobe (Teilenummer $i = 601, \dots, 800$) dargestellt (Abkürzung: SP \rightarrow Stichprobe).

6.2 Geometrieparameter d_2

Zur Ermittlung eines Schätzwertes $\hat{d}_{i|2}$ für die tatsächliche Abmessung $d_{i|2}$ einer zufällig ausgewählten i -ten Pleuelstange bzgl. des Geometrieparameters d_2 wurde im Rahmen der Kalibrierung die in Gl. (6.2) angegebene Regressionsfunktion bestimmt. In dieser sind neben einer Konstanten weitere $k = 20$ Terme berücksichtigt (14 der ersten $m = 17$ Eigenfrequenzen $f_{i|1}, \dots, f_{i|16}$ und 6 Produktterme). Die konkreten Schätzwerte der in der Regressionsfunktion berücksichtigten Modellparameter sind in Anhang A.5.2 gezeigt. Aus der Kalibrierung resultiert weiterhin ein Bestimmtheitsmaß von $R^2 = 0,99915$ (korrigiertes Bestimmtheitsmaß: $\bar{R}^2 = 0,99912$).

$$\begin{aligned}
 \hat{d}_{i|2} = & + \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 \cdot f_{i|1} + \hat{\alpha}_2 \cdot f_{i|2} + \hat{\alpha}_4 \cdot f_{i|4} + \hat{\alpha}_5 \cdot f_{i|5} + \hat{\alpha}_6 \cdot f_{i|6} + \hat{\alpha}_7 \cdot f_{i|7} + \hat{\alpha}_8 \cdot f_{i|8} \\
 & + \hat{\alpha}_{10} \cdot f_{i|10} + \hat{\alpha}_{11} \cdot f_{i|11} + \hat{\alpha}_{12} \cdot f_{i|12} + \hat{\alpha}_{13} \cdot f_{i|13} + \hat{\alpha}_{15} \cdot f_{i|15} + \hat{\alpha}_{16} \cdot f_{i|16} \\
 & + \hat{\alpha}_{17} \cdot f_{i|17} + \hat{\alpha}_{1|6} \cdot f_{i|1} \cdot f_{i|6} + \hat{\alpha}_{1|7} \cdot f_{i|1} \cdot f_{i|7} + \hat{\alpha}_{1|10} \cdot f_{i|1} \cdot f_{i|10} \\
 & + \hat{\alpha}_{6|10} \cdot f_{i|6} \cdot f_{i|10} + \hat{\alpha}_{7|8} \cdot f_{i|7} \cdot f_{i|8} + \hat{\alpha}_{7|10} \cdot f_{i|7} \cdot f_{i|10}
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

In Tabelle 6.2 bzw. Abbildung 6.2 sind Kennwerte bzw. Diagramme zur Charakterisierung der Differenzen $e_i = d_{i|2} - \hat{d}_{i|2}$ sowie des linearen Zusammenhangs zwischen den tatsächlichen Abmessungen $d_{i|2}$ aller virtuellen Teile bzgl. des Geometrieparameters d_2 und den Schätzwerten $\hat{d}_{i|2}$ dargestellt (vgl. Kapitel 5.3.3). Die Kennwerte und Diagramme sind getrennt für die $n_{cal} = 600$ virtuellen Teile der Kalibrierstichprobe ($i = 1, \dots, 600$) bzw. die $n_{val} = 200$ virtuellen Teile der Validierstichprobe ($i = 601, \dots, 800$) ermittelt.

Tabelle 6.2: Auflistung von Kennwerten zur Charakterisierung der Differenzen $e_i = d_{i|2} - \hat{d}_{i|2}$ sowie des linearen Zusammenhangs zwischen den tatsächlichen Abmessungen $d_{i|2}$ aller virtuellen Teile bzgl. des Geometrieparameters d_2 und den Schätzwerten $\hat{d}_{i|2}$. Die Kennwerte sind separat für die $n_{cal} = 600$ Teile der Kalibrierstichprobe (Teilenummer $i = 1, \dots, 600$) sowie die $n_{val} = 200$ Teile der Validierstichprobe (Teilenummer $i = 601, \dots, 800$) errechnet. Mit Ausnahme des dimensionslosen Korrelationskoeffizienten sind alle Kennwerte absolut (in mm) sowie relativ (in %) in Bezug auf den sechsfachen Wert der Standardabweichung σ_{D2} (siehe Kapitel 5.1, $6 \cdot \sigma_{D2} = 1,2$ mm) angegeben.

Kennwert	Kalibrierstichprobe		Validierstichprobe	
	absolut (mm)	relativ (%)	absolut (mm)	relativ (%)
Mittelwert \bar{e}	$3,5 \cdot 10^{-14}$	$2,9 \cdot 10^{-12}$	0,0003	0,028
Standardabweichung s_e	0,0057	0,473	0,0071	0,593
Mittlerer Fehler $ \bar{e} $	0,0042	0,346	0,0048	0,401
Maximalfehler $ e_i _{max}$	0,0268	2,234	0,0381	3,177
Korrelationskoeffizient r	0,99958		0,99937	

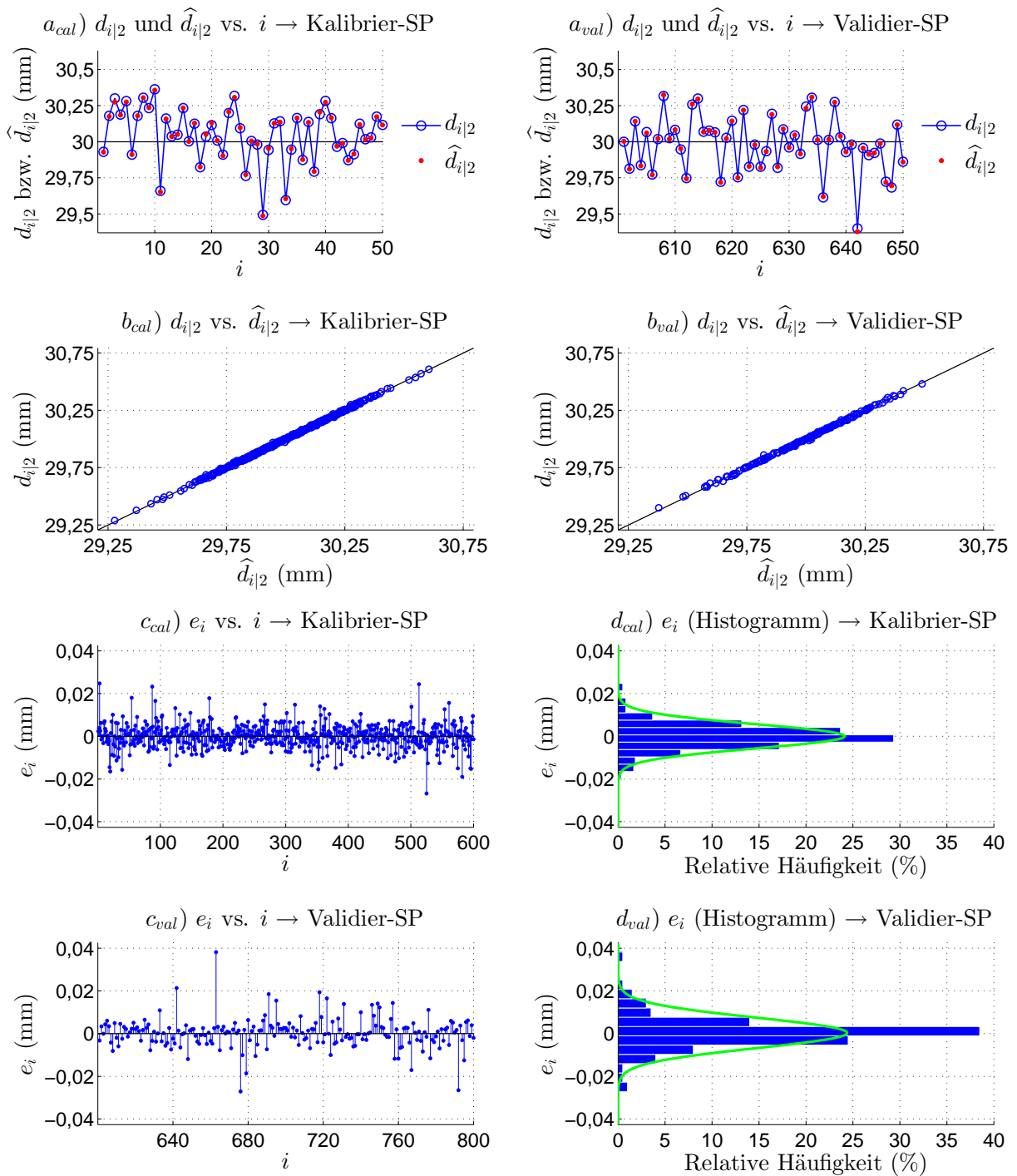


Abbildung 6.2: Darstellung von Diagrammen zur Charakterisierung der Differenzen $e_i = d_{i|2} - \hat{d}_{i|2}$ sowie des linearen Zusammenhangs zwischen den tatsächlichen Abmessungen $d_{i|2}$ aller virtuellen Teile bzgl. des Geometrieparameters d_2 und den Schätzwerten $\hat{d}_{i|2}$. Konkret sind in den Diagrammen a_{cal} bzw. a_{val} die tatsächlichen Abmessungen $d_{i|2}$ sowie die Schätzwerte $\hat{d}_{i|2}$ über der Teilenummer i , in den Diagrammen b_{cal} bzw. b_{val} die tatsächlichen Abmessungen $d_{i|2}$ über den Schätzwerten $\hat{d}_{i|2}$, in den Diagrammen c_{cal} bzw. c_{val} die Differenzen e_i über der Teilenummer i und in den Diagrammen d_{cal} bzw. d_{val} die Verteilung der Differenzen e_i gezeigt. Die Diagramme sind separat für die $n_{cal} = 600$ Teile der Kalibrierstichprobe (Teilenummer $i = 1, \dots, 600$) sowie die $n_{val} = 200$ Teile der Validierstichprobe (Teilenummer $i = 601, \dots, 800$) dargestellt (Abkürzung: SP \rightarrow Stichprobe).

6.3 Geometrieparameter d_3

Zur Ermittlung eines Schätzwertes $\hat{d}_{i|3}$ für die tatsächliche Abmessung $d_{i|3}$ einer zufällig ausgewählten i -ten Pleuelstange bzgl. des Geometrieparameters d_3 wurde im Rahmen der Kalibrierung die in Gl. (6.3) angegebene Regressionsfunktion bestimmt. In dieser sind neben einer Konstanten weitere $k = 20$ Terme berücksichtigt (11 der ersten $m = 17$ Eigenfrequenzen $f_{i|1}, \dots, f_{i|16}$ und 9 Produktterme). Die konkreten Schätzwerte der in der Regressionsfunktion berücksichtigten Modellparameter sind in Anhang A.5.3 gezeigt. Aus der Kalibrierung resultiert weiterhin ein Bestimmtheitsmaß von $R^2 = 0,99993$ (korrigiertes Bestimmtheitsmaß: $\bar{R}^2 = 0,99993$).

$$\begin{aligned}
 \hat{d}_{i|3} = & + \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 \cdot f_{i|1} + \hat{\alpha}_4 \cdot f_{i|4} + \hat{\alpha}_5 \cdot f_{i|5} + \hat{\alpha}_7 \cdot f_{i|7} + \hat{\alpha}_8 \cdot f_{i|8} + \hat{\alpha}_9 \cdot f_{i|9} \\
 & + \hat{\alpha}_{10} \cdot f_{i|10} + \hat{\alpha}_{11} \cdot f_{i|11} + \hat{\alpha}_{12} \cdot f_{i|12} + \hat{\alpha}_{13} \cdot f_{i|13} + \hat{\alpha}_{14} \cdot f_{i|14} + \hat{\alpha}_{1|4} \cdot f_{i|1} \cdot f_{i|4} \\
 & + \hat{\alpha}_{1|13} \cdot f_{i|1} \cdot f_{i|13} + \hat{\alpha}_{4|12} \cdot f_{i|4} \cdot f_{i|12} + \hat{\alpha}_{5|10} \cdot f_{i|5} \cdot f_{i|10} + \hat{\alpha}_{7|9} \cdot f_{i|7} \cdot f_{i|9} \\
 & + \hat{\alpha}_{7|12} \cdot f_{i|7} \cdot f_{i|12} + \hat{\alpha}_{8|12} \cdot f_{i|8} \cdot f_{i|12} + \hat{\alpha}_{8|14} \cdot f_{i|8} \cdot f_{i|14} + \hat{\alpha}_{11|13} \cdot f_{i|11} \cdot f_{i|13}
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

In Tabelle 6.3 bzw. Abbildung 6.3 sind Kennwerte bzw. Diagramme zur Charakterisierung der Differenzen $e_i = d_{i|3} - \hat{d}_{i|3}$ sowie des linearen Zusammenhangs zwischen den tatsächlichen Abmessungen $d_{i|3}$ aller virtuellen Teile bzgl. des Geometrieparameters d_3 und den Schätzwerten $\hat{d}_{i|3}$ dargestellt (vgl. Kapitel 5.3.3). Die Kennwerte und Diagramme sind getrennt für die $n_{cal} = 600$ virtuellen Teile der Kalibrierstichprobe ($i = 1, \dots, 600$) bzw. die $n_{val} = 200$ virtuellen Teile der Validierstichprobe ($i = 601, \dots, 800$) ermittelt.

Tabelle 6.3: Auflistung von Kennwerten zur Charakterisierung der Differenzen $e_i = d_{i|3} - \hat{d}_{i|3}$ sowie des linearen Zusammenhangs zwischen den tatsächlichen Abmessungen $d_{i|3}$ aller virtuellen Teile bzgl. des Geometrieparameters d_3 und den Schätzwerten $\hat{d}_{i|3}$. Die Kennwerte sind separat für die $n_{cal} = 600$ Teile der Kalibrierstichprobe (Teilenummer $i = 1, \dots, 600$) sowie die $n_{val} = 200$ Teile der Validierstichprobe (Teilenummer $i = 601, \dots, 800$) errechnet. Mit Ausnahme des dimensionslosen Korrelationskoeffizienten sind alle Kennwerte absolut (in mm) sowie relativ (in %) in Bezug auf den sechsfachen Wert der Standardabweichung σ_{D3} (siehe Kapitel 5.1, $6 \cdot \sigma_{D3} = 0,9$ mm) angegeben.

Kennwert	Kalibrierstichprobe		Validierstichprobe	
	absolut (mm)	relativ (%)	absolut (mm)	relativ (%)
Mittelwert \bar{e}	$-1,7 \cdot 10^{-14}$	$-1,9 \cdot 10^{-12}$	$-2,4 \cdot 10^{-6}$	$-2,7 \cdot 10^{-4}$
Standardabweichung s_e	0,0013	0,146	0,0016	0,182
Mittlerer Fehler $ \bar{e} $	0,0010	0,109	0,0012	0,132
Maximalfehler $ e_i _{max}$	0,0063	0,695	0,0078	0,863
Korrelationskoeffizient r	0,99997		0,99994	

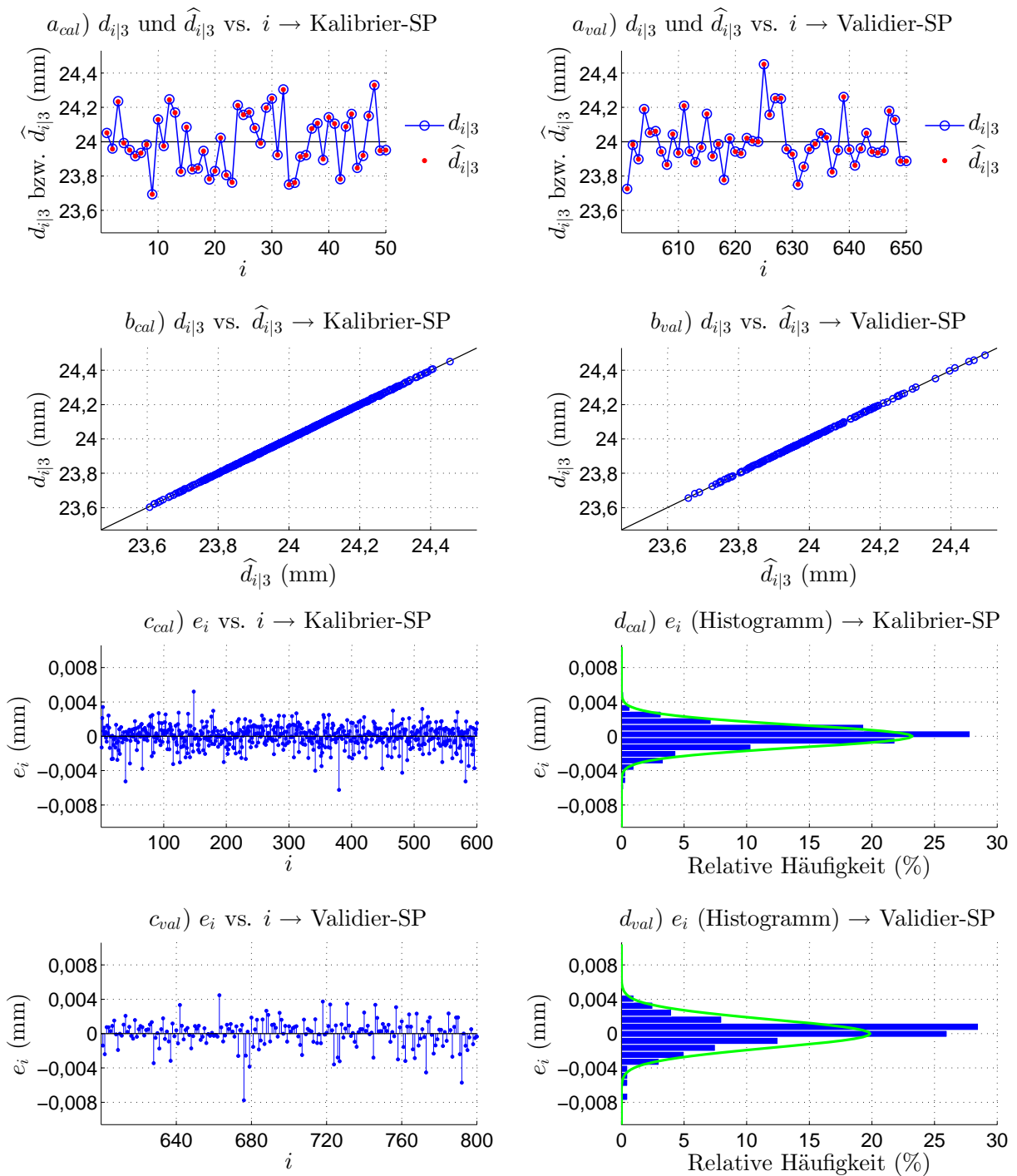


Abbildung 6.3: Darstellung von Diagrammen zur Charakterisierung der Differenzen $e_i = d_{i|3} - \hat{d}_{i|3}$ sowie des linearen Zusammenhangs zwischen den tatsächlichen Abmessungen $d_{i|3}$ aller virtuellen Teile bzgl. des Geometrieparameters d_3 und den Schätzwerten $\hat{d}_{i|3}$. Koncret sind in den Diagrammen a_{cal} bzw. a_{val} die tatsächlichen Abmessungen $d_{i|3}$ sowie die Schätzwerte $\hat{d}_{i|3}$ über der Teilenummer i , in den Diagrammen b_{cal} bzw. b_{val} die tatsächlichen Abmessungen $d_{i|3}$ über den Schätzwerten $\hat{d}_{i|3}$, in den Diagrammen c_{cal} bzw. c_{val} die Differenzen e_i über der Teilenummer i und in den Diagrammen d_{cal} bzw. d_{val} die Verteilung der Differenzen e_i gezeigt. Die Diagramme sind separat für die $n_{cal} = 600$ Teile der Kalibrierstichprobe (Teilenummer $i = 1, \dots, 600$) sowie die $n_{val} = 200$ Teile der Validierstichprobe (Teilenummer $i = 601, \dots, 800$) dargestellt (Abkürzung: SP \rightarrow Stichprobe).

6.4 Geometrieparameter d_4

Zur Ermittlung eines Schätzwertes $\hat{d}_{i|4}$ für die tatsächliche Abmessung $d_{i|4}$ einer zufällig ausgewählten i -ten Pleuelstange bzgl. des Geometrieparameters d_4 wurde im Rahmen der Kalibrierung die in Gl. (6.4) angegebene Regressionsfunktion bestimmt. In dieser sind neben einer Konstanten weitere $k = 20$ Terme berücksichtigt (12 der ersten $m = 17$ Eigenfrequenzen $f_{i|1}, \dots, f_{i|16}$ und 8 Produktterme). Die konkreten Schätzwerte der in der Regressionsfunktion berücksichtigten Modellparameter sind in Anhang A.5.4 gezeigt. Aus der Kalibrierung resultiert weiterhin ein Bestimmtheitsmaß von $R^2 = 0,99895$ (korrigiertes Bestimmtheitsmaß: $\bar{R}^2 = 0,99891$).

$$\begin{aligned}
 \hat{d}_{i|4} = & + \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 \cdot f_{i|1} + \hat{\alpha}_4 \cdot f_{i|4} + \hat{\alpha}_5 \cdot f_{i|5} + \hat{\alpha}_7 \cdot f_{i|7} + \hat{\alpha}_8 \cdot f_{i|8} + \hat{\alpha}_9 \cdot f_{i|9} \\
 & + \hat{\alpha}_{10} \cdot f_{i|10} + \hat{\alpha}_{11} \cdot f_{i|11} + \hat{\alpha}_{12} \cdot f_{i|12} + \hat{\alpha}_{13} \cdot f_{i|13} + \hat{\alpha}_{15} \cdot f_{i|15} + \hat{\alpha}_{16} \cdot f_{i|16} \\
 & + \hat{\alpha}_{1|4} \cdot f_{i|1} \cdot f_{i|4} + \hat{\alpha}_{1|8} \cdot f_{i|1} \cdot f_{i|8} + \hat{\alpha}_{1|9} \cdot f_{i|1} \cdot f_{i|9} + \hat{\alpha}_{1|10} \cdot f_{i|1} \cdot f_{i|10} \\
 & + \hat{\alpha}_{1|11} \cdot f_{i|1} \cdot f_{i|11} + \hat{\alpha}_{5|15} \cdot f_{i|5} \cdot f_{i|15} + \hat{\alpha}_{7|15} \cdot f_{i|7} \cdot f_{i|15} + \hat{\alpha}_{12|13} \cdot f_{i|12} \cdot f_{i|13}
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

In Tabelle 6.4 bzw. Abbildung 6.4 sind Kennwerte bzw. Diagramme zur Charakterisierung der Differenzen $e_i = d_{i|4} - \hat{d}_{i|4}$ sowie des linearen Zusammenhangs zwischen den tatsächlichen Abmessungen $d_{i|4}$ aller virtuellen Teile bzgl. des Geometrieparameters d_4 und den Schätzwerten $\hat{d}_{i|4}$ dargestellt (vgl. Kapitel 5.3.3). Die Kennwerte und Diagramme sind getrennt für die $n_{cal} = 600$ virtuellen Teile der Kalibrierstichprobe ($i = 1, \dots, 600$) bzw. die $n_{val} = 200$ virtuellen Teile der Validierstichprobe ($i = 601, \dots, 800$) ermittelt.

Tabelle 6.4: Auflistung von Kennwerten zur Charakterisierung der Differenzen $e_i = d_{i|4} - \hat{d}_{i|4}$ sowie des linearen Zusammenhangs zwischen den tatsächlichen Abmessungen $d_{i|4}$ aller virtuellen Teile bzgl. des Geometrieparameters d_4 und den Schätzwerten $\hat{d}_{i|4}$. Die Kennwerte sind separat für die $n_{cal} = 600$ Teile der Kalibrierstichprobe (Teilenummer $i = 1, \dots, 600$) sowie die $n_{val} = 200$ Teile der Validierstichprobe (Teilenummer $i = 601, \dots, 800$) errechnet. Mit Ausnahme des dimensionslosen Korrelationskoeffizienten sind alle Kennwerte absolut (in mm) sowie relativ (in %) in Bezug auf den sechsfachen Wert der Standardabweichung σ_{D4} (siehe Kapitel 5.1, $6 \cdot \sigma_{D4} = 1,2$ mm) angegeben.

Kennwert	Kalibrierstichprobe		Validierstichprobe	
	absolut (mm)	relativ (%)	absolut (mm)	relativ (%)
Mittelwert \bar{e}	$-1,4 \cdot 10^{-13}$	$-1,2 \cdot 10^{-11}$	-0,0007	-0,058
Standardabweichung s_e	0,0066	0,548	0,0083	0,694
Mittlerer Fehler $ \bar{e} $	0,0049	0,411	0,0056	0,465
Maximalfehler $ e_i _{max}$	0,0263	2,195	0,0620	5,169
Korrelationskoeffizient r	0,99947		0,99922	

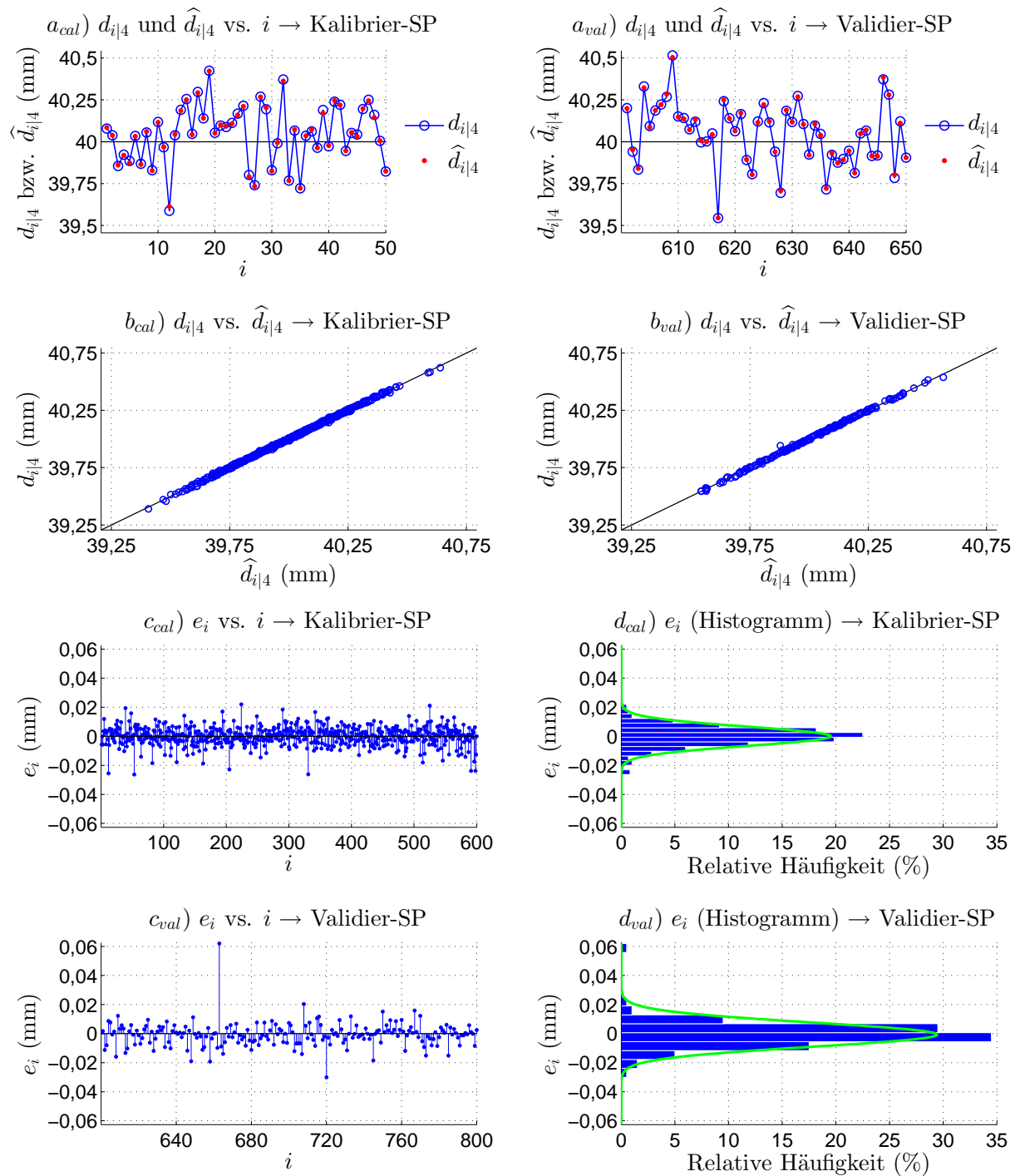


Abbildung 6.4: Darstellung von Diagrammen zur Charakterisierung der Differenzen $e_i = d_{i|4} - \hat{d}_{i|4}$ sowie des linearen Zusammenhangs zwischen den tatsächlichen Abmessungen $d_{i|4}$ aller virtuellen Teile bzgl. des Geometrieparameters d_4 und den Schätzwerten $\hat{d}_{i|4}$. Konkret sind in den Diagrammen a_{cal} bzw. a_{val} die tatsächlichen Abmessungen $d_{i|4}$ sowie die Schätzwerte $\hat{d}_{i|4}$ über der Teilenummer i , in den Diagrammen b_{cal} bzw. b_{val} die tatsächlichen Abmessungen $d_{i|4}$ über den Schätzwerten $\hat{d}_{i|4}$, in den Diagrammen c_{cal} bzw. c_{val} die Differenzen e_i über der Teilenummer i und in den Diagrammen d_{cal} bzw. d_{val} die Verteilung der Differenzen e_i gezeigt. Die Diagramme sind separat für die $n_{cal} = 600$ Teile der Kalibrierstichprobe (Teilenummer $i = 1, \dots, 600$) sowie die $n_{val} = 200$ Teile der Validierstichprobe (Teilenummer $i = 601, \dots, 800$) dargestellt (Abkürzung: SP \rightarrow Stichprobe).

6.5 Geometrieparameter h_1

Zur Ermittlung eines Schätzwertes $\hat{h}_{i|1}$ für die tatsächliche Abmessung $h_{i|1}$ einer zufällig ausgewählten i -ten Pleuelstange bzgl. des Geometrieparameters h_1 wurde im Rahmen der Kalibrierung die in Gl. (6.5) angegebene Regressionsfunktion bestimmt. In dieser sind neben einer Konstanten weitere $k = 20$ Terme berücksichtigt (14 der ersten $m = 17$ Eigenfrequenzen $f_{i|1}, \dots, f_{i|16}$ und 6 Produktterme). Die konkreten Schätzwerte der in der Regressionsfunktion berücksichtigten Modellparameter sind in Anhang A.5.5 gezeigt. Aus der Kalibrierung resultiert weiterhin ein Bestimmtheitsmaß von $R^2 = 0,99991$ (korrigiertes Bestimmtheitsmaß: $\bar{R}^2 = 0,99991$).

$$\begin{aligned}
 \hat{h}_{i|1} = & + \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 \cdot f_{i|1} + \hat{\alpha}_2 \cdot f_{i|2} + \hat{\alpha}_3 \cdot f_{i|3} + \hat{\alpha}_4 \cdot f_{i|4} + \hat{\alpha}_5 \cdot f_{i|5} + \hat{\alpha}_6 \cdot f_{i|6} \\
 & + \hat{\alpha}_7 \cdot f_{i|7} + \hat{\alpha}_8 \cdot f_{i|8} + \hat{\alpha}_9 \cdot f_9 + \hat{\alpha}_{10} \cdot f_{i|10} + \hat{\alpha}_{11} \cdot f_{i|11} + \hat{\alpha}_{12} \cdot f_{i|12} \\
 & + \hat{\alpha}_{13} \cdot f_{i|13} + \hat{\alpha}_{15} \cdot f_{i|15} + \hat{\alpha}_{1|11} \cdot f_{i|1} \cdot f_{i|11} + \hat{\alpha}_{1|13} \cdot f_{i|1} \cdot f_{i|13} \\
 & + \hat{\alpha}_{2|5} \cdot f_{i|2} \cdot f_{i|5} + \hat{\alpha}_{2|12} \cdot f_{i|2} \cdot f_{i|12} + \hat{\alpha}_{5|15} \cdot f_{i|5} \cdot f_{i|15} + \hat{\alpha}_{8|11} \cdot f_{i|8} \cdot f_{i|11}
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

In Tabelle 6.5 bzw. Abbildung 6.5 sind Kennwerte bzw. Diagramme zur Charakterisierung der Differenzen $e_i = h_{i|1} - \hat{h}_{i|1}$ sowie des linearen Zusammenhangs zwischen den tatsächlichen Abmessungen $h_{i|1}$ aller virtuellen Teile bzgl. des Geometrieparameters h_1 und den Schätzwerten $\hat{h}_{i|1}$ dargestellt (vgl. Kapitel 5.3.3). Die Kennwerte und Diagramme sind getrennt für die $n_{cal} = 600$ virtuellen Teile der Kalibrierstichprobe ($i = 1, \dots, 600$) bzw. die $n_{val} = 200$ virtuellen Teile der Validierstichprobe ($i = 601, \dots, 800$) ermittelt.

Tabelle 6.5: Auflistung von Kennwerten zur Charakterisierung der Differenzen $e_i = h_{i|1} - \hat{h}_{i|1}$ sowie des linearen Zusammenhangs zwischen den tatsächlichen Abmessungen $h_{i|1}$ aller virtuellen Teile bzgl. des Geometrieparameters h_1 und den Schätzwerten $\hat{h}_{i|1}$. Die Kennwerte sind separat für die $n_{cal} = 600$ Teile der Kalibrierstichprobe (Teilenummer $i = 1, \dots, 600$) sowie die $n_{val} = 200$ Teile der Validierstichprobe (Teilenummer $i = 601, \dots, 800$) errechnet. Mit Ausnahme des dimensionslosen Korrelationskoeffizienten sind alle Kennwerte absolut (in mm) sowie relativ (in %) in Bezug auf den sechsfachen Wert der Standardabweichung σ_{H1} (siehe Kapitel 5.1, $6 \cdot \sigma_{H1} = 0,9$ mm) angegeben.

Kennwert	Kalibrierstichprobe		Validierstichprobe	
	absolut (mm)	relativ (%)	absolut (mm)	relativ (%)
Mittelwert \bar{e}	$-7,1 \cdot 10^{-15}$	$-7,9 \cdot 10^{-13}$	-0,0001	-0,010
Standardabweichung s_e	0,0013	0,146	0,0015	0,165
Mittlerer Fehler $ \bar{e} $	0,0010	0,109	0,0011	0,122
Maximalfehler $ e_i _{max}$	0,0064	0,715	0,0070	0,778
Korrelationskoeffizient r	0,99996		0,99995	

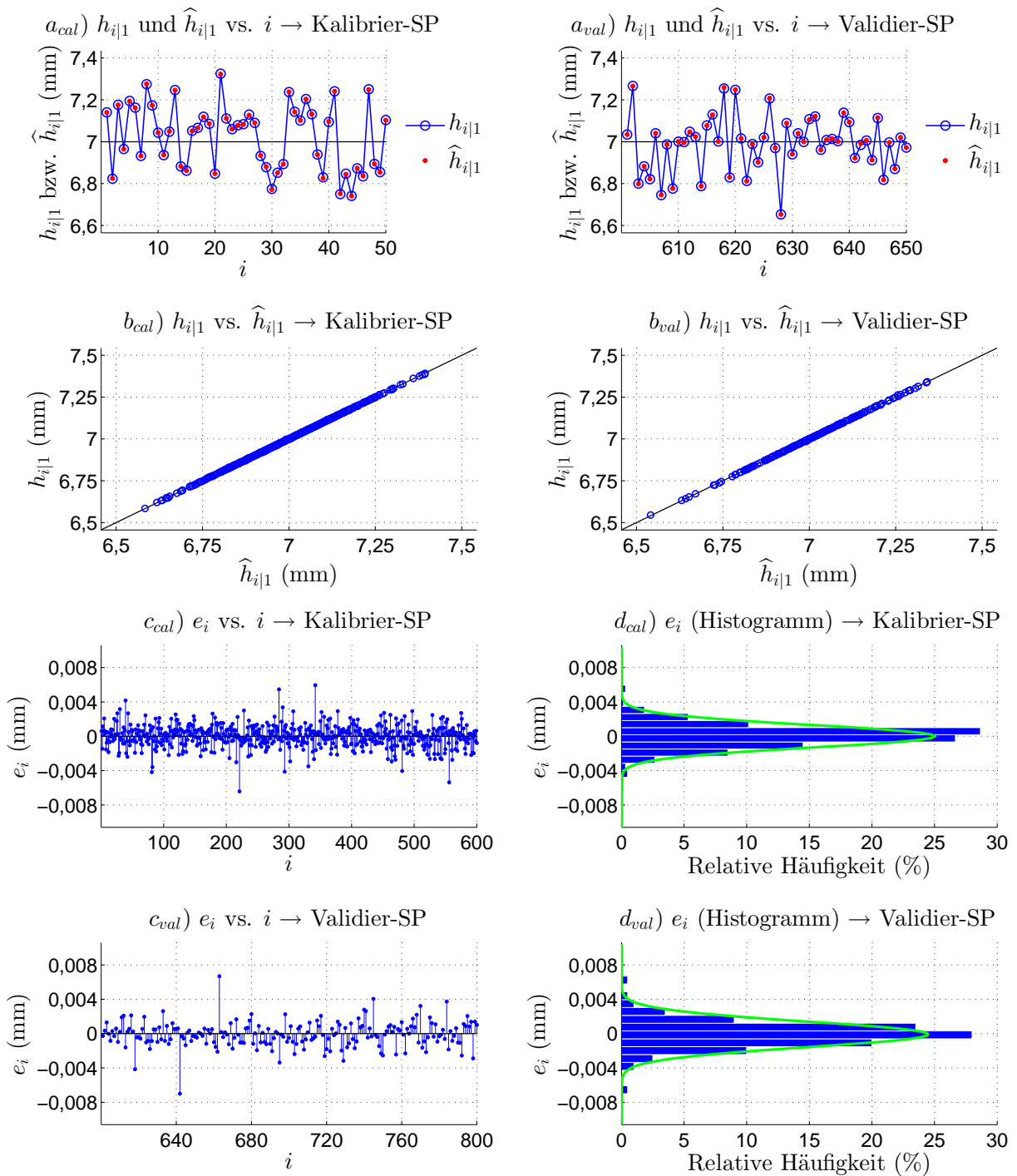


Abbildung 6.5: Darstellung von Diagrammen zur Charakterisierung der Differenzen $e_i = h_{i|1} - \hat{h}_{i|1}$ sowie des linearen Zusammenhangs zwischen den tatsächlichen Abmessungen $h_{i|1}$ aller virtuellen Teile bzgl. des Geometrieparameters h_1 und den Schätzwerten $\hat{h}_{i|1}$. Konkret sind in den Diagrammen a_{cal} bzw. a_{val} die tatsächlichen Abmessungen $h_{i|1}$ sowie die Schätzwerte $\hat{h}_{i|1}$ über der Teilenummer i , in den Diagrammen b_{cal} bzw. b_{val} die tatsächlichen Abmessungen $h_{i|1}$ über den Schätzwerten $\hat{h}_{i|1}$, in den Diagrammen c_{cal} bzw. c_{val} die Differenzen e_i über der Teilenummer i und in den Diagrammen d_{cal} bzw. d_{val} die Verteilung der Differenzen e_i gezeigt. Die Diagramme sind separat für die $n_{cal} = 600$ Teile der Kalibrierstichprobe (Teilenummer $i = 1, \dots, 600$) sowie die $n_{val} = 200$ Teile der Validierstichprobe (Teilenummer $i = 601, \dots, 800$) dargestellt (Abkürzung: SP \rightarrow Stichprobe).

6.6 Geometrieparameter h_2

Zur Ermittlung eines Schätzwertes $\hat{h}_{i|2}$ für die tatsächliche Abmessung $h_{i|2}$ einer zufällig ausgewählten i -ten Pleuelstange bzgl. des Geometrieparameters h_2 wurde im Rahmen der Kalibrierung die in Gl. (6.6) angegebene Regressionsfunktion bestimmt. In dieser sind neben einer Konstanten weitere $k = 20$ Terme berücksichtigt (13 der ersten $m = 17$ Eigenfrequenzen $f_{i|1}, \dots, f_{i|16}$ und 7 Produktterme). Die konkreten Schätzwerte der in der Regressionsfunktion berücksichtigten Modellparameter sind in Anhang A.5.6 gezeigt. Aus der Kalibrierung resultiert weiterhin ein Bestimmtheitsmaß von $R^2 = 0,99949$ (korrigiertes Bestimmtheitsmaß: $\bar{R}^2 = 0,99948$).

$$\begin{aligned}
 \hat{h}_{i|2} = & + \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 \cdot f_{i|1} + \hat{\alpha}_4 \cdot f_{i|4} + \hat{\alpha}_5 \cdot f_{i|5} + \hat{\alpha}_7 \cdot f_{i|7} + \hat{\alpha}_8 \cdot f_{i|8} + \hat{\alpha}_9 \cdot f_{i|9} \\
 & + \hat{\alpha}_{10} \cdot f_{i|10} + \hat{\alpha}_{11} \cdot f_{i|11} + \hat{\alpha}_{12} \cdot f_{i|12} + \hat{\alpha}_{13} \cdot f_{i|13} + \hat{\alpha}_{14} \cdot f_{i|14} + \hat{\alpha}_{15} \cdot f_{i|15} \\
 & + \hat{\alpha}_{17} \cdot f_{i|17} + \hat{\alpha}_{14} \cdot f_{i|1} \cdot f_{i|4} + \hat{\alpha}_{7|9} \cdot f_{i|7} \cdot f_{i|9} + \hat{\alpha}_{7|13} \cdot f_{i|7} \cdot f_{i|13} \\
 & + \hat{\alpha}_{8|11} \cdot f_{i|8} \cdot f_{i|11} + \hat{\alpha}_{8|13} \cdot f_{i|8} \cdot f_{i|13} + \hat{\alpha}_{10|15} \cdot f_{i|10} \cdot f_{i|15} + \hat{\alpha}_{12|15} \cdot f_{i|12} \cdot f_{i|15}
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

In Tabelle 6.6 bzw. Abbildung 6.6 sind Kennwerte bzw. Diagramme zur Charakterisierung der Differenzen $e_i = h_{i|2} - \hat{h}_{i|2}$ sowie des linearen Zusammenhangs zwischen den tatsächlichen Abmessungen $h_{i|2}$ aller virtuellen Teile bzgl. des Geometrieparameters h_2 und den Schätzwerten $\hat{h}_{i|2}$ dargestellt (vgl. Kapitel 5.3.3). Die Kennwerte und Diagramme sind getrennt für die $n_{cal} = 600$ virtuellen Teile der Kalibrierstichprobe ($i = 1, \dots, 600$) bzw. die $n_{val} = 200$ virtuellen Teile der Validierstichprobe ($i = 601, \dots, 800$) ermittelt.

Tabelle 6.6: Auflistung von Kennwerten zur Charakterisierung der Differenzen $e_i = h_{i|2} - \hat{h}_{i|2}$ sowie des linearen Zusammenhangs zwischen den tatsächlichen Abmessungen $h_{i|2}$ aller virtuellen Teile bzgl. des Geometrieparameters h_2 und den Schätzwerten $\hat{h}_{i|2}$. Die Kennwerte sind separat für die $n_{cal} = 600$ Teile der Kalibrierstichprobe (Teilenummer $i = 1, \dots, 600$) sowie die $n_{val} = 200$ Teile der Validierstichprobe (Teilenummer $i = 601, \dots, 800$) errechnet. Mit Ausnahme des dimensionslosen Korrelationskoeffizienten sind alle Kennwerte absolut (in mm) sowie relativ (in %) in Bezug auf den sechsfachen Wert der Standardabweichung σ_{H2} (siehe Kapitel 5.1, $6 \cdot \sigma_{H2} = 0,9$ mm) angegeben.

Kennwert	Kalibrierstichprobe		Validierstichprobe	
	absolut (mm)	relativ (%)	absolut (mm)	relativ (%)
Mittelwert \bar{e}	$3,7 \cdot 10^{-15}$	$4,2 \cdot 10^{-13}$	-0,0002	-0,024
Standardabweichung s_e	0,0034	0,376	0,0042	0,467
Mittlerer Fehler $ \bar{e} $	0,0025	0,276	0,0028	0,309
Maximalfehler $ e_i _{max}$	0,0212	2,353	0,0350	3,890
Korrelationskoeffizient r	0,99975		0,99966	

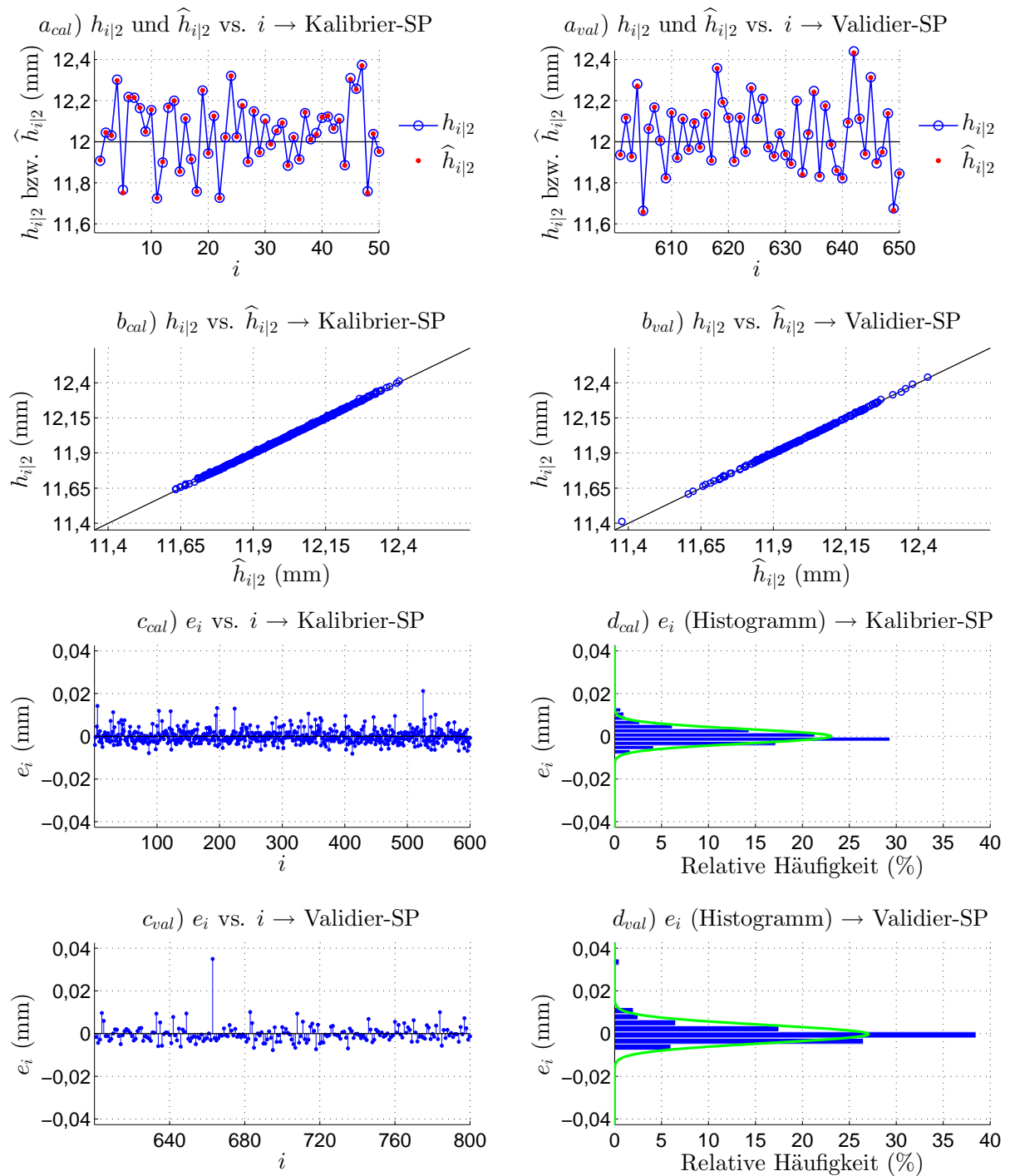


Abbildung 6.6: Darstellung von Diagrammen zur Charakterisierung der Differenzen $e_i = h_{i|2} - \hat{h}_{i|2}$ sowie des linearen Zusammenhangs zwischen den tatsächlichen Abmessungen $h_{i|2}$ aller virtuellen Teile bzw. des Geometrieparameters h_2 und den Schätzwerten $\hat{h}_{i|2}$. Konkret sind in den Diagrammen a_{cal} bzw. a_{val} die tatsächlichen Abmessungen $h_{i|2}$ sowie die Schätzwerte $\hat{h}_{i|2}$ über der Teilenummer i , in den Diagrammen b_{cal} bzw. b_{val} die tatsächlichen Abmessungen $h_{i|2}$ über den Schätzwerten $\hat{h}_{i|2}$, in den Diagrammen c_{cal} bzw. c_{val} die Differenzen e_i über der Teilenummer i und in den Diagrammen d_{cal} bzw. d_{val} die Verteilung der Differenzen e_i gezeigt. Die Diagramme sind separat für die $n_{cal} = 600$ Teile der Kalibrierstichprobe (Teilenummer $i = 1, \dots, 600$) sowie die $n_{val} = 200$ Teile der Validierstichprobe (Teilenummer $i = 601, \dots, 800$) dargestellt (Abkürzung: SP → Stichprobe).

6.7 Geometrieparameter l

Zur Ermittlung eines Schätzwertes \hat{l}_i für die tatsächliche Abmessung l_i einer zufällig ausgewählten i -ten Pleuelstange bzgl. des Geometrieparameters l wurde im Rahmen der Kalibrierung die in Gl. (6.7) angegebene Regressionsfunktion bestimmt. In dieser sind neben einer Konstanten weitere $k = 20$ Terme berücksichtigt (13 der ersten $m = 17$ Eigenfrequenzen $f_{i|1}, \dots, f_{i|16}$ und 7 Produktterme). Die konkreten Schätzwerte der in der Regressionsfunktion berücksichtigten Modellparameter sind in Anhang A.5.7 gezeigt. Aus der Kalibrierung resultiert weiterhin ein Bestimmtheitsmaß von $R^2 = 0,99956$ (korrigiertes Bestimmtheitsmaß: $\bar{R}^2 = 0,99954$).

$$\begin{aligned} \hat{l}_i = & + \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 \cdot f_{i|1} + \hat{\alpha}_2 \cdot f_{i|2} + \hat{\alpha}_3 \cdot f_{i|3} + \hat{\alpha}_4 \cdot f_{i|4} + \hat{\alpha}_5 \cdot f_{i|5} + \hat{\alpha}_6 \cdot f_{i|6} \\ & + \hat{\alpha}_7 \cdot f_{i|7} + \hat{\alpha}_8 \cdot f_{i|8} + \hat{\alpha}_9 \cdot f_{i|9} + \hat{\alpha}_{10} \cdot f_{i|10} + \hat{\alpha}_{11} \cdot f_{i|11} + \hat{\alpha}_{13} \cdot f_{i|13} \\ & + \hat{\alpha}_{16} \cdot f_{i|16} + \hat{\alpha}_{1|7} \cdot f_{i|1} \cdot f_{i|7} + \hat{\alpha}_{1|9} \cdot f_{i|1} \cdot f_{i|9} + \hat{\alpha}_{1|13} \cdot f_{i|1} \cdot f_{i|13} \\ & + \hat{\alpha}_{5|11} \cdot f_{i|5} \cdot f_{i|11} + \hat{\alpha}_{8|11} \cdot f_{i|8} \cdot f_{i|11} + \hat{\alpha}_{10|16} \cdot f_{i|10} \cdot f_{i|16} + \hat{\alpha}_{11|13} \cdot f_{i|11} \cdot f_{i|13} \end{aligned} \quad (6.7)$$

In Tabelle 6.7 bzw. Abbildung 6.7 sind Kennwerte bzw. Diagramme zur Charakterisierung der Differenzen $e_i = l_i - \hat{l}_i$ sowie des linearen Zusammenhangs zwischen den tatsächlichen Abmessungen l_i aller virtuellen Teile bzgl. des Geometrieparameters l und den Schätzwerten \hat{l}_i dargestellt (vgl. Kapitel 5.3.3). Die Kennwerte und Diagramme sind getrennt für die $n_{cal} = 600$ virtuellen Teile der Kalibrierstichprobe ($i = 1, \dots, 600$) bzw. die $n_{val} = 200$ virtuellen Teile der Validierstichprobe ($i = 601, \dots, 800$) ermittelt.

Tabelle 6.7: Auflistung von Kennwerten zur Charakterisierung der Differenzen $e_i = l_i - \hat{l}_i$ sowie des linearen Zusammenhangs zwischen den tatsächlichen Abmessungen l_i aller virtuellen Teile bzgl. des Geometrieparameters l und den Schätzwerten \hat{l}_i . Die Kennwerte sind separat für die $n_{cal} = 600$ Teile der Kalibrierstichprobe (Teilenummer $i = 1, \dots, 600$) sowie die $n_{val} = 200$ Teile der Validierstichprobe (Teilenummer $i = 601, \dots, 800$) errechnet. Mit Ausnahme des dimensionslosen Korrelationskoeffizienten sind alle Kennwerte absolut (in mm) sowie relativ (in %) in Bezug auf den sechsfachen Wert der Standardabweichung σ_L (siehe Kapitel 5.1, $6 \cdot \sigma_L = 2,4$ mm) angegeben.

Kennwert	Kalibrierstichprobe		Validierstichprobe	
	absolut (mm)	relativ (%)	absolut (mm)	relativ (%)
Mittelwert \bar{e}	$1,1 \cdot 10^{-13}$	$4,4 \cdot 10^{-12}$	-0,0015	-0,064
Standardabweichung s_e	0,0086	0,359	0,0097	0,403
Mittlerer Fehler $ \bar{e} $	0,0063	0,263	0,0063	0,262
Maximalfehler $ e_i _{max}$	0,0465	1,938	0,0772	3,215
Korrelationskoeffizient r	0,99978		0,99973	

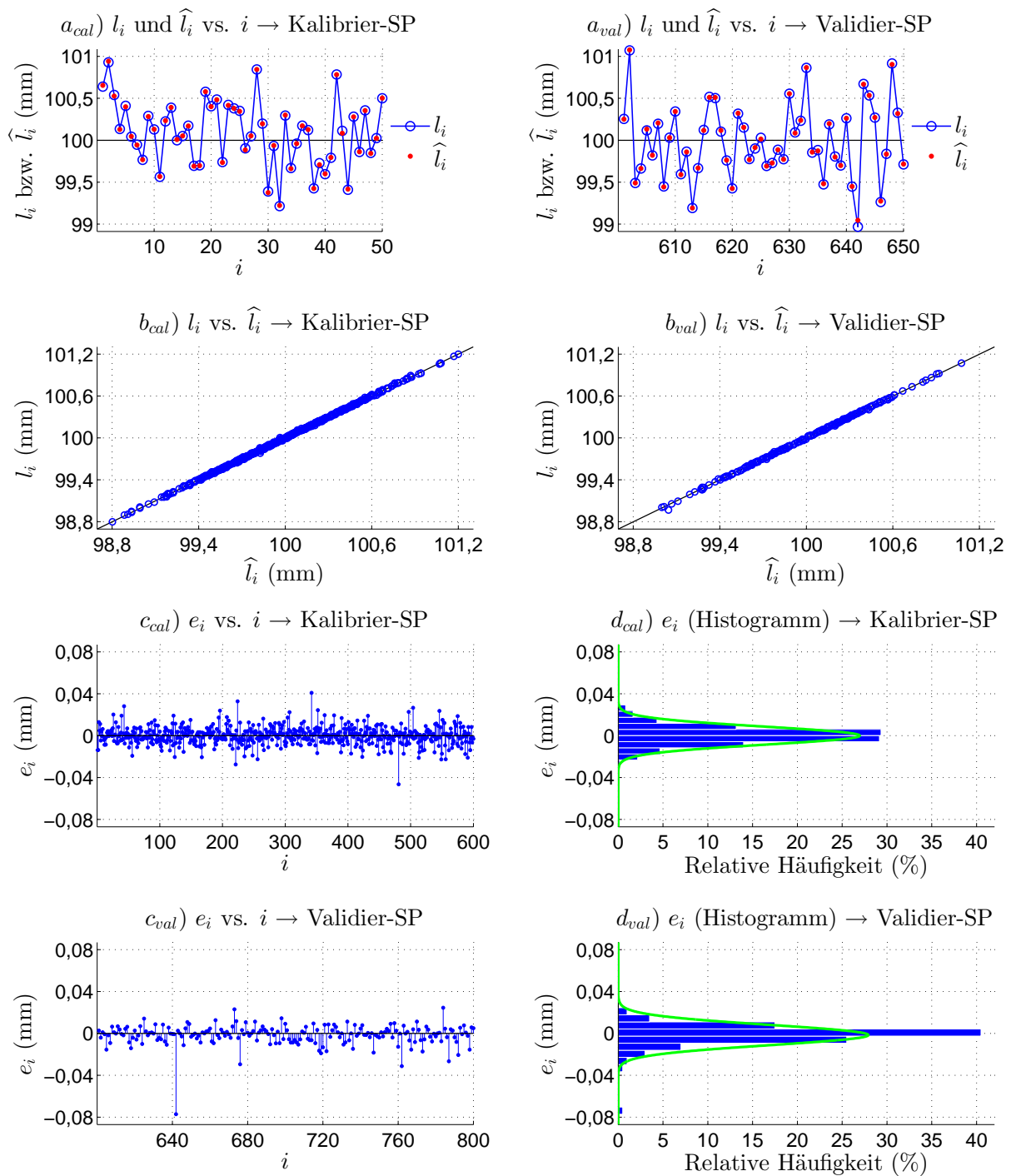


Abbildung 6.7: Darstellung von Diagrammen zur Charakterisierung der Differenzen $e_i = l_i - \hat{l}_i$ sowie des linearen Zusammenhangs zwischen den tatsächlichen Abmessungen l_i aller virtuellen Teile bzgl. des Geometrieparameters l und den Schätzwerten \hat{l}_i . Konkret sind in den Diagrammen a_{cal} bzw. a_{val} die tatsächlichen Abmessungen l_i sowie die Schätzwerte \hat{l}_i über der Teilenummer i , in den Diagrammen b_{cal} bzw. b_{val} die tatsächlichen Abmessungen l_i über den Schätzwerten \hat{l}_i , in den Diagrammen c_{cal} bzw. c_{val} die Differenzen e_i über der Teilenummer i und in den Diagrammen d_{cal} bzw. d_{val} die Verteilung der Differenzen e_i gezeigt. Die Diagramme sind separat für die $n_{cal} = 600$ Teile der Kalibrierstichprobe (Teilenummer $i = 1, \dots, 600$) sowie die $n_{val} = 200$ Teile der Validierstichprobe (Teilenummer $i = 601, \dots, 800$) dargestellt (Abkürzung: SP \rightarrow Stichprobe).

6.8 Geometrieparameter b

Zur Ermittlung eines Schätzwertes \hat{b}_i für die tatsächliche Abmessung b_i einer zufällig ausgewählten i -ten Pleuelstange bzgl. des Geometrieparameters b wurde im Rahmen der Kalibrierung die in Gl. (6.8) angegebene Regressionsfunktion bestimmt. In dieser sind neben einer Konstanten weitere $k = 20$ Terme berücksichtigt (12 der ersten $m = 17$ Eigenfrequenzen $f_{i|1}, \dots, f_{i|16}$ und 8 Produktterme). Die konkreten Schätzwerte der in der Regressionsfunktion berücksichtigten Modellparameter sind in Anhang A.5.8 gezeigt. Aus der Kalibrierung resultiert weiterhin ein Bestimmtheitsmaß von $R^2 = 0,99988$ (korrigiertes Bestimmtheitsmaß: $\bar{R}^2 = 0,99988$).

$$\begin{aligned}
 \hat{b}_i = & + \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 \cdot f_{i|1} + \hat{\alpha}_5 \cdot f_{i|5} + \hat{\alpha}_6 \cdot f_{i|6} + \hat{\alpha}_8 \cdot f_{i|8} + \hat{\alpha}_{10} \cdot f_{i|10} + \hat{\alpha}_{11} \cdot f_{i|11} \\
 & + \hat{\alpha}_{12} \cdot f_{i|12} + \hat{\alpha}_{13} \cdot f_{i|13} + \hat{\alpha}_{14} \cdot f_{i|14} + \hat{\alpha}_{15} \cdot f_{i|15} + \hat{\alpha}_{16} \cdot f_{i|16} + \hat{\alpha}_{17} \cdot f_{i|17} \\
 & + \hat{\alpha}_{1|13} \cdot f_{i|1} \cdot f_{i|13} + \hat{\alpha}_{1|17} \cdot f_{i|1} \cdot f_{i|17} + \hat{\alpha}_{5|12} \cdot f_{i|5} \cdot f_{i|12} + \hat{\alpha}_{8|13} \cdot f_{i|8} \cdot f_{i|13} \\
 & + \hat{\alpha}_{8|17} \cdot f_{i|8} \cdot f_{i|17} + \hat{\alpha}_{10|16} \cdot f_{i|10} \cdot f_{i|16} + \hat{\alpha}_{13|17} \cdot f_{i|13} \cdot f_{i|17} + \hat{\alpha}_{14|17} \cdot f_{i|14} \cdot f_{i|17}
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

In Tabelle 6.8 bzw. Abbildung 6.8 sind Kennwerte bzw. Diagramme zur Charakterisierung der Differenzen $e_i = b_i - \hat{b}_i$ sowie des linearen Zusammenhangs zwischen den tatsächlichen Abmessungen b_i aller virtuellen Teile bzgl. des Geometrieparameters b und den Schätzwerten \hat{b}_i dargestellt (vgl. Kapitel 5.3.3). Die Kennwerte und Diagramme sind getrennt für die $n_{cal} = 600$ virtuellen Teile der Kalibrierstichprobe ($i = 1, \dots, 600$) bzw. die $n_{val} = 200$ virtuellen Teile der Validierstichprobe ($i = 601, \dots, 800$) ermittelt.

Tabelle 6.8: Auflistung von Kennwerten zur Charakterisierung der Differenzen $e_i = b_i - \hat{b}_i$ sowie des linearen Zusammenhangs zwischen den tatsächlichen Abmessungen b_i aller virtuellen Teile bzgl. des Geometrieparameters b und den Schätzwerten \hat{b}_i . Die Kennwerte sind separat für die $n_{cal} = 600$ Teile der Kalibrierstichprobe (Teilenummer $i = 1, \dots, 600$) sowie die $n_{val} = 200$ Teile der Validierstichprobe (Teilenummer $i = 601, \dots, 800$) errechnet. Mit Ausnahme des dimensionslosen Korrelationskoeffizienten sind alle Kennwerte absolut (in mm) sowie relativ (in %) in Bezug auf den sechsfachen Wert der Standardabweichung σ_B (siehe Kapitel 5.1, $6 \cdot \sigma_B = 1,2$ mm) angegeben.

Kennwert	Kalibrierstichprobe		Validierstichprobe	
	absolut (mm)	relativ (%)	absolut (mm)	relativ (%)
Mittelwert \bar{e}	$3,0 \cdot 10^{-14}$	$2,5 \cdot 10^{-12}$	-0,0003	-0,022
Standardabweichung s_e	0,0022	0,185	0,0026	0,215
Mittlerer Fehler $ \bar{e} $	0,0016	0,137	0,0019	0,154
Maximalfehler $ e_i _{max}$	0,0087	0,727	0,0105	0,875
Korrelationskoeffizient r	0,99994		0,99990	

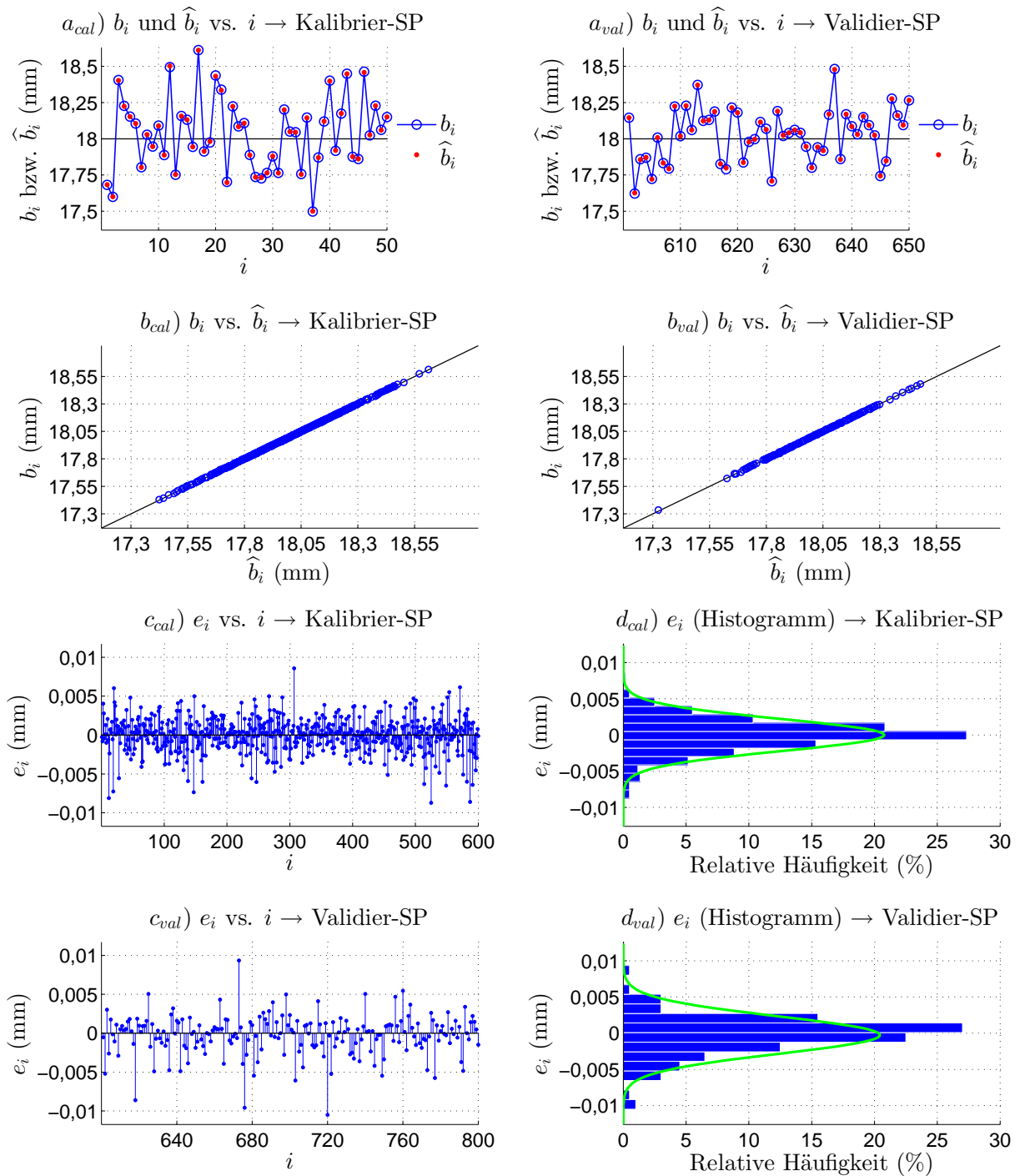


Abbildung 6.8: Darstellung von Diagrammen zur Charakterisierung der Differenzen $e_i = b_i - \hat{b}_i$ sowie des linearen Zusammenhangs zwischen den tatsächlichen Abmessungen b_i aller virtuellen Teile bzgl. des Geometrieparameters b und den Schätzwerten \hat{b}_i . Konkret sind in den Diagrammen a_{cal} bzw. a_{val} die tatsächlichen Abmessungen b_i sowie die Schätzwerte \hat{b}_i über der Teilenummer i , in den Diagrammen b_{cal} bzw. b_{val} die tatsächlichen Abmessungen b_i über den Schätzwerten \hat{b}_i , in den Diagrammen c_{cal} bzw. c_{val} die Differenzen e_i über der Teilenummer i und in den Diagrammen d_{cal} bzw. d_{val} die Verteilung der Differenzen e_i gezeigt. Die Diagramme sind separat für die $n_{cal} = 600$ Teile der Kalibrierstichprobe (Teilenummer $i = 1, \dots, 600$) sowie die $n_{val} = 200$ Teile der Validierstichprobe (Teilenummer $i = 601, \dots, 800$) dargestellt (Abkürzung: SP \rightarrow Stichprobe).

6.9 Zusammenfassende Ergebnisbeschreibung

In den Regressionsfunktionen der acht Geometrieparameter sind jeweils eine Konstante sowie $k = 20$ weitere Terme enthalten. Dabei sind in den Regressionsfunktionen mindestens 8 (Geometrieparameter d_1) bzw. maximal 14 (Geometrieparameter d_2 und h_1) der $m = 17$ ersten Eigenfrequenzen berücksichtigt. Folglich finden sich in den Funktionen zwischen 6 (Geometrieparameter d_2 und h_1) und 12 (Geometrieparameter d_1) Produktterme.

Aus der Kalibrierung (also aus den schrittweisen Regressionsanalysen bzw. ihren finalen Schritten) resultieren Bestimmtheitsmaße zwischen mindestens $R^2 = 0,99895$ (Geometrieparameter d_4) und höchstens $R^2 = 0,99993$ (Geometrieparameter d_3).

Tabelle 6.1 bis Tabelle 6.8 zeigen verschiedene Kennwerte zur Charakterisierung der Differenzen sowie des linearen Zusammenhangs zwischen den tatsächlichen Abmessungen aller $n = 800$ virtuellen Teile und den entsprechenden Schätzwerten. Die Kennwerte sind getrennt für die Teile der Kalibrierstichprobe (Teilenummer $i = 1, \dots, 600$) sowie die Teile der Validierstichprobe (Teilenummer $i = 601, \dots, 800$) ermittelt. Für die Kalibrierteile sind immer (mit Ausnahme des mittleren Fehlers $|\bar{e}|$ den Geometrieparameter l betreffend) etwas günstigere Kennwerte als für die Validierteile zu erkennen. Der Korrelationskoeffizient r liegt für die Kalibrierteile zwischen $r = 0,99947$ (Geometrieparameter d_4) und $r = 0,99997$ (Geometrieparameter d_3) und für die Validierteile zwischen $r = 0,99922$ (Geometrieparameter d_4) und $r = 0,99995$ (Geometrieparameter h_1). Alle weiteren Kennwerte aus Tabelle 6.1 bis Tabelle 6.8 sind sowohl absolut (in mm) als auch prozentual in Bezug auf den sechsfachen Wert der entsprechenden Standardabweichung angegeben. Die absoluten Kennwerte liegen ungefähr in den folgenden Bereichen, in Klammern ist jeweils der zum jeweiligen Kennwert gehörende Geometrieparameter angegeben:

- Mittelwert \bar{e}
 - $\bar{e} = -1,4 \cdot 10^{-13}$ mm (d_4) bis $\bar{e} = 1,1 \cdot 10^{-13}$ mm (l) für die Kalibrierteile
 - $\bar{e} = -0,0015$ mm (l) bis $\bar{e} = 0,0003$ mm (d_2) für die Validierteile
- Standardabweichung s_e
 - $s_e = 0,0013$ mm (d_3) bis $s_e = 0,0086$ mm (l) für die Kalibrierteile
 - $s_e = 0,0015$ mm (h_1) bis $s_e = 0,0097$ mm (l) für die Validierteile
- Mittlerer Fehler $|\bar{e}|$
 - $|\bar{e}| = 0,0010$ mm (d_3) bis $|\bar{e}| = 0,0063$ mm (l) für die Kalibrierteile

- $|\bar{e}| = 0,0011 \text{ mm } (h_1)$ bis $|\bar{e}| = 0,0063 \text{ mm } (l)$ für die Validierteile
- Maximalfehler $|e_i|_{max}$
 - $|e_i|_{max} = 0,0063 \text{ mm } (d_3)$ bis $|e_i|_{max} = 0,0465 \text{ mm } (l)$ für die Kalibrierteile
 - $|e_i|_{max} = 0,0070 \text{ mm } (h_1)$ bis $|e_i|_{max} = 0,0772 \text{ mm } (l)$ für die Validierteile

Die auf die jeweiligen sechsfachen Standardabweichungen bezogenen relativen Kennwerte liegen analog dazu ungefähr in den folgenden Bereichen:

- Mittelwert \bar{e}
 - $\bar{e} = -1,2 \cdot 10^{-11} \% (d_4)$ bis $\bar{e} = 4,4 \cdot 10^{-12} \% (l)$ für die Kalibrierteile
 - $\bar{e} = -0,064 \% (l)$ bis $\bar{e} = 0,028 \% (d_2)$ für die Validierteile
- Standardabweichung s_e
 - $s_e = 0,146 \% (d_3)$ bis $s_e = 0,548 \% (d_4)$ für die Kalibrierteile
 - $s_e = 0,165 \% (h_1)$ bis $s_e = 0,694 \% (d_4)$ für die Validierteile
- Mittlerer Fehler $|\bar{e}|$
 - $|\bar{e}| = 0,109 \% (d_3)$ bis $|\bar{e}| = 0,411 \% (d_4)$ für die Kalibrierteile
 - $|\bar{e}| = 0,122 \% (h_1)$ bis $|\bar{e}| = 0,465 \% (d_4)$ für die Validierteile
- Maximalfehler $|e_i|_{max}$
 - $|e_i|_{max} = 0,695 \% (d_3)$ bis $|e_i|_{max} = 2,353 \% (h_2)$ für die Kalibrierteile
 - $|e_i|_{max} = 0,778 \% (h_1)$ bis $|e_i|_{max} = 5,169 \% (d_4)$ für die Validierteile

Auffällig an obigen Aufzählungen ist, dass insbesondere der mittlere Fehler $|\bar{e}|$ sowie der Maximalfehler $|e_i|_{max}$ die größten und damit ungünstigsten absoluten Werte jeweils für den Geometrieparameter l vorliegen. Für die entsprechenden prozentualen Kennwerte entfallen die ungünstigsten Werte mehrheitlich auf den Geometrieparameter d_4 .

An dieser Stelle wird knapp auf Abbildung 6.1 bis Abbildung 6.8 eingegangen. Diese beinhalten verschiedene Diagramme, die zur Charakterisierung der Differenzen sowie des linearen Zusammenhangs zwischen den tatsächlichen Abmessungen der virtuellen Teile und den entsprechenden Schätzwerten dienen. Analog zu den zuvor beschriebenen Kennwerten sind die Diagramme getrennt für die Teile der Kalibrierstichprobe (Teilenummer

$i = 1, \dots, 600$) sowie die Teile der Validierstichprobe (Teilenummer $i = 601, \dots, 800$) dargestellt. Die Diagramme a_{cal} , b_{cal} , c_{cal} und d_{cal} beziehen sich jeweils auf die Kalibrierteile, die Diagramme a_{val} , b_{val} , c_{val} und d_{val} auf die Validierteile. Folgendes bleibt festzuhalten:

- In den Diagrammen a_{cal} bzw. a_{val} ist jeweils erkennbar, dass die tatsächlichen Abmessungen und die entsprechenden Schätzwerte in der Regel gut übereinstimmen. Besonders in den Diagrammen bzgl. einiger Geometrieparameter (z. B. d_3 und h_1) sind kaum Unterschiede erkennbar. Im Gegensatz dazu sind z. B. in den Diagrammen zum Geometrieparameter d_4 für einige Teile geringe Differenzen zwischen tatsächlichen Abmessungen und entsprechenden Schätzwerten ersichtlich. Es sind jedoch für keinen Geometrieparameter wesentliche Unterschiede zwischen den Diagrammen a_{cal} und a_{val} zu beobachten.
- Die Diagramme b_{cal} bzw. b_{val} zeigen einen sehr hohen linearen Zusammenhang zwischen tatsächlichen Abmessungen und Schätzwerten, die meisten Datenpunkte liegen nahe an einer Geraden mit der Steigung 1. Lediglich einige Punkte weichen deutlich erkennbar von dieser Geraden ab (siehe z. B. das Diagramm b_{val} zum Geometrieparameter d_4 oder das entsprechende Diagramm zum Geometrieparameter l).
- In den Diagrammen c_{cal} bzw. c_{val} ist ersichtlich, dass die Differenzen zwischen den tatsächlichen Abmessungen und den Schätzwerten für einige Teile betragsmäßig deutlich größer als für die meisten anderen Teile sind. Dies trifft insbesondere auf die Diagramme c_{val} (also auf die Diagramme zu den Validierteilen) bzgl. einiger Geometrieparameter zu. Beispielsweise ist in den entsprechenden Diagrammen zu den Geometrieparametern d_4 , h_2 und l erkennbar, dass jeweils die Differenz für ein Teil die Differenzen der anderen Teile von der Größenordnung her deutlich übertrifft.
- Alle Diagramme d_{cal} bzw. d_{val} zeigen eine mehr oder weniger symmetrische Verteilung der Differenzen mit einem ausgeprägten Häufigkeitsmaximum ungefähr bei dem Wert 0. Auch hier sind insbesondere in den Diagrammen d_{val} zu einigen Geometrieparametern die verhältnismäßig großen Differenzen zwischen den tatsächlichen Abmessungen und den Schätzwerten ersichtlich.

Im Folgenden sind für jeden Geometrieparameter die vier Validierteile aufgelistet, für welche die größten Fehler zwischen tatsächlichen Abmessungen und Schätzwerten vorliegen. Dabei ist jeweils neben der Teilenummer i der Fehler $|e_i|$ zwischen tatsächlicher

Abmessung und Schätzwert prozentual bezogen auf die sechsfache Standardabweichung des jeweiligen Geometrieparameters angegeben (Teilenummer $i \rightarrow$ Fehler $|e_i|$).

- Geometrieparameter d_1

1) $i = 676 \rightarrow e_i = 2,142\%$	3) $i = 792 \rightarrow e_i = 1,435\%$
2) $i = 602 \rightarrow e_i = 1,825\%$	4) $i = 729 \rightarrow e_i = 0,996\%$

- Geometrieparameter d_2

1) $i = 663 \rightarrow e_i = 3,177\%$	3) $i = 792 \rightarrow e_i = 2,207\%$
2) $i = 676 \rightarrow e_i = 2,259\%$	4) $i = 642 \rightarrow e_i = 1,778\%$

- Geometrieparameter d_3

1) $i = 676 \rightarrow e_i = 0,863\%$	3) $i = 773 \rightarrow e_i = 0,504\%$
2) $i = 792 \rightarrow e_i = 0,635\%$	4) $i = 663 \rightarrow e_i = 0,497\%$

- Geometrieparameter d_4

1) $i = 663 \rightarrow e_i = 5,169\%$	3) $i = 708 \rightarrow e_i = 1,692\%$
2) $i = 720 \rightarrow e_i = 2,505\%$	4) $i = 658 \rightarrow e_i = 1,601\%$

- Geometrieparameter h_1

1) $i = 642 \rightarrow e_i = 0,778\%$	3) $i = 618 \rightarrow e_i = 0,461\%$
2) $i = 663 \rightarrow e_i = 0,744\%$	4) $i = 745 \rightarrow e_i = 0,451\%$

- Geometrieparameter h_2

1) $i = 663 \rightarrow e_i = 3,890\%$	3) $i = 784 \rightarrow e_i = 1,111\%$
2) $i = 683 \rightarrow e_i = 1,117\%$	4) $i = 604 \rightarrow e_i = 1,074\%$

- Geometrieparameter l

1) $i = 642 \rightarrow e_i = 3,215\%$	3) $i = 676 \rightarrow e_i = 1,230\%$
2) $i = 762 \rightarrow e_i = 1,300\%$	4) $i = 787 \rightarrow e_i = 1,111\%$

- Geometrieparameter b

1) $i = 720 \rightarrow e_i = 0,875\%$	3) $i = 673 \rightarrow e_i = 0,778\%$
2) $i = 676 \rightarrow e_i = 0,799\%$	4) $i = 618 \rightarrow e_i = 0,719\%$

Bei Betrachtung obiger Aufzählungen ist ersichtlich, dass bestimmte Teilenummern i in den Aufzählungen zu mehreren Geometrieparametern aufgeführt sind. Die entsprechenden Pleuelstangen sind also durch mehrere große Fehler $|e_i|$ zwischen den tatsächlichen Abmessungen und den Schätzwerten gekennzeichnet. Unter den jeweils vier größten Fehlern $|e_i|$ (bzgl. der acht Geometrieparameter) beziehen sich jeweils fünf Fehler auf die Pleuelstangen mit den Teilenummern $i = 663$ (Geometrieparameter d_2, d_3, d_4, h_1 und h_2) und $i = 676$ (Geometrieparameter d_1, d_2, d_3, l und b).

Die jeweils größten Fehler $|e_i|$ (also die Maximalfehler $|e_i|_{max}$) zwischen den tatsächlichen Abmessungen sowie den entsprechenden Schätzwerten entfallen auf lediglich vier verschiedene Pleuelstangen. Hinsichtlich der Geometrieparameter d_2, d_4 und h_2 ist der Maximalfehler $|e_i|_{max}$ jeweils für die Pleuelstange mit der Teilenummer $i = 663$ zu beobachten. Die Pleuelstangen mit den Teilenummer $i = 642$ bzw. $i = 676$ sind die Teile, für welche die Maximalfehler $|e_i|_{max}$ bzgl. der Geometrieparameter h_1 und l bzw. bzgl. der Geometrieparameter d_1 und d_3 vorliegen. Hinsichtlich des Geometrieparameters b weist die Pleuelstange mit der Teilenummer $i = 720$ den maximalen Fehler $|e_i|_{max}$ auf.

Insgesamt nur acht Fehler $|e_i|$ zwischen den tatsächlichen Abmessungen aller $n_{val} = 200$ Validierteile und den entsprechenden Schätzwerten weisen Werte von mehr als 2% auf. Drei bzw. zwei dieser Fehler beziehen sich auf die Geometrieparameter d_2 und d_4 . Weiterhin ist bzgl. der Geometrieparameter d_1, h_2 und l jeweils für ein Teil ein Fehler $|e_i|$ über 2% zu beobachten. Die insgesamt acht Fehler oberhalb von 2% beziehen sich auf fünf verschiedene Pleuelstangen, nur fünf der insgesamt $n_{val} = 200$ Validierteile weisen also einen Fehler über 2% auf.

Zusätzlich ist anzumerken, dass die Fehler $|e_i|$ zwischen den tatsächlichen Abmessungen bzgl. der Geometrieparameter d_3, h_1 und b und den entsprechenden Schätzwerten für alle $n_{val} = 200$ Validierteile stets Werte unter 1% aufweisen. Ebenso ist beim Vergleich von Tabelle 6.1 bis Tabelle 6.8 erkennbar, dass die Standardabweichungen s_e sowie die mittleren Fehler $|\bar{e}|$ für die Geometrieparameter d_3, h_1 und b geringere Werte als für die anderen fünf Geometrieparameter aufweisen. Im Gegensatz dazu sind z. B. die Fehler $|e_i|$ bzgl. der Geometrieparameter d_2 bzw. d_4 für 16 bzw. 17 Pleuelstangen größer als 1%.

7 Diskussion

7.1 Diskussion der Ergebnisse

Anhand von Kapitel 6.1 bis Kapitel 6.9 ist ersichtlich, dass aus den Kalibrierungen (also aus den schrittweisen Regressionsanalysen bzw. ihren finalen Schritten) hohe Bestimmtheitsmaße von jeweils deutlich über $R^2 = 0,99$ resultieren. Bereits daraus konnte geschlossen werden, dass das vorgeschlagene Verfahren zur eigenfrequenzbasierten Geometrieabschätzung für die betrachteten Pleuelstangen geeignet ist. Weiterhin wurden die in Kapitel 5.3.2 beschriebenen Kennwerte und Diagramme zur Charakterisierung der Differenzen und des linearen Zusammenhangs zwischen den tatsächlichen Abmessungen sowie den entsprechenden Schätzwerten getrennt für die $n_{cal} = 600$ Kalibrierteile sowie die $n_{val} = 200$ Validierteile ermittelt (siehe Tabelle 6.1 bis Tabelle 6.8 und Abbildung 6.1 bis Abbildung 6.8). Sowohl die Kennwerte als auch die Diagramme bestätigen die prinzipielle Eignung des Verfahrens für die Pleuelstangen. Insbesondere ist anhand der entsprechenden Kennwerte und Diagramme ersichtlich, dass die eigenfrequenzbasierte Geometrieabschätzung nach einer Kalibrierung i. d. R. gut auf bisher nicht betrachtete Teile (in diesem Fall auf die Validierteile) aus derselben Grundgesamtheit übertragen werden kann.

Auffällig ist jedoch, dass die tatsächlichen Abmessungen und die entsprechenden Schätzwerte für einige Geometrieparameter besser als für andere Geometrieparameter übereinstimmen. Die Fehler $|e_i|$ zwischen den tatsächlichen Abmessungen und den Schätzwerten sind in der Regel aber trotzdem sehr gering. Prozentual bezogen auf den jeweils wesentlichen Wertebereich der Abmessungen ergaben sich beispielsweise für die Geometrieparameter h_1 und d_4 der Validierteile mittlere Fehler $|\bar{e}|$ von 0,122 % und 0,465 %. Die entsprechenden Maximalfehler $|e_i|_{max}$ bzgl. der Geometrieparameter h_1 und d_4 betragen 0,778 % und 5,169 %. Während für keines der Validierteile bzgl. der Geometrieparameter d_3 oder h_1 ein Fehler $|e_i|$ größer als 1 % vorliegt, weisen insgesamt 17 dieser Teile bzgl. des Geometrieparameters d_4 einen Fehler über 1 % auf. Es ist also ersichtlich, dass die eigenfrequenzbasierte Geometrieabschätzung für bestimmte Geometrieparameter bzw. Abmessungen der Pleuelstange geeigneter ist. Mit solchen Effekten ist auch für andere Tei-

learten zu rechnen, die Ursachen dafür werden jedoch als sehr kompliziert angesehen. Eine Aussage zur Eignung eines bestimmten Teiletyps bzw. seiner Abmessungen zur eigenfrequenzbasierten Geometrieabschätzung erfordert somit weitere Untersuchungen.

Aus Kapitel 6.9 geht hervor, dass insbesondere zwischen den tatsächlichen Abmessungen bestimmter Teile und den entsprechenden Schätzwerten verhältnismäßig große Fehler $|e_i|$ zu beobachten sind. Exemplarisch sind dazu die Teile mit den Nummern $i = 663$ und $i = 676$ genannt. Die Maximalfehler $|e_i|_{max}$ bzgl. fünf der acht Geometrieparameter beziehen sich beispielsweise auf diese Teile. Der übergreifend größte Maximalfehler $|e_i|_{max}$ bzgl. aller acht Geometrieparameter beträgt 5,169 % und wurde für den Geometrieparameter d_4 eines der beiden Teile ($i = 663$) beobachtet. Außerdem entfallen fünf der insgesamt acht Fehler $|e_i|$ über 2 % auf die genannten Teile. Zur Analyse der Ursachen diene ein Vergleich der tatsächlichen Abmessungen dieser Teile mit den entsprechenden Abmessungen der $n_{cal} = 600$ Kalibrierteile. Dabei konnte festgestellt werden, dass die tatsächlichen Abmessungen der Kalibrierteile bzgl. des Geometrieparameters h_2 zwischen 11,640 mm und 12,412 mm liegen. Die entsprechende tatsächliche Abmessung des Teils mit der Nummer $i = 663$ beträgt dahingegen 11,412 mm und befindet sich damit deutlich außerhalb des zuvor genannten Bereichs. Analog dazu liegen die entsprechenden Abmessungen der zur Kalibrierung genutzten Teile bzgl. des Geometrieparameters d_3 zwischen 23,603 mm und 24,451 mm. Im Gegensatz dazu weist das Teil mit der Nummer $i = 676$ eine entsprechende Abmessung von 24,488 mm auf, auch diese Abmessung liegt somit knapp außerhalb des Kalibrierbereichs. In Abbildung 7.1 sind zur Verdeutlichung die tatsächlichen Abmessungen der Teile mit den Nummern $i = 663$ und $i = 676$ bzgl. aller acht Geometrieparameter indirekt mit den entsprechenden Abmessungen der Kalibrierteile verglichen. Es wird geschlossen, dass solche großen Fehler zwischen den tatsächlichen Abmessungen eines Teils und den entsprechenden Schätzwerten darauf zurückzuführen sind, dass das Teil mindestens eine extreme Abmessung aufweist, die nicht innerhalb des zur Kalibrierung genutzten Wertebereichs liegt. Im Umkehrschluss wird gefolgert, dass die eigenfrequenzbasierte Geometrieabschätzung vor allem dann zu guten Schätzwerten für unbekannte Teile führt, wenn die zur Kalibrierung genutzten Teile den möglichen Wertebereich bzgl. aller Abmessungen vollständig abdecken.

Zur Ermittlung der Regressionsfunktionen (siehe Kapitel 6.1 bis Kapitel 6.8) diene der in Kapitel 5.3.2 beschriebene (schrittweise) Regressionsalgorithmus, der auf maximal 20 Schritte begrenzt wurde und eine Kombination aus *Vorwärtsverfahren* sowie *Rückwärtsverfahren* (siehe Kapitel 3) darstellt. Dieser Algorithmus erweitert das bestehende

Modell zunächst solange schrittweise um die geeignetste, bisher nicht im Modell enthaltene Eingangsgröße, bis auf Basis des entsprechenden Signifikanzniveaus keine weitere Eingangsgröße aufgenommen werden kann. Erst im Anschluss daran wird ggf. eine Eingangsgröße wieder aus dem Modell entfernt. In den Regressionsfunktionen aller acht Geometrieparameter sind jeweils eine Konstante sowie $k = 20$ weitere Terme berücksichtigt (siehe Kapitel 6). Der Abbruch des Regressionsalgorithmus erfolgte also stets nach 20 Schritten und nach der Aufnahme von 20 Termen, in keinem Fall wurde eine Eingangsgröße wieder aus einer Regressionsfunktion entfernt. Es ist also davon auszugehen, dass der Algorithmus weitere Eingangsgrößen aufgenommen hätte, sofern mehr als 20 Schritte erlaubt gewesen wären. Dies konnte experimentell bestätigt werden, im Anschluss an erneute Regressionsrechnungen mit maximal 40 anstatt 20 Schritten finden sich in den entsprechenden Regressionsfunktionen der acht Geometrieparameter jeweils neben einer Konstanten zwischen $k = 34$ und $k = 40$ weitere Eingangsgrößen (siehe Anhang A.6).

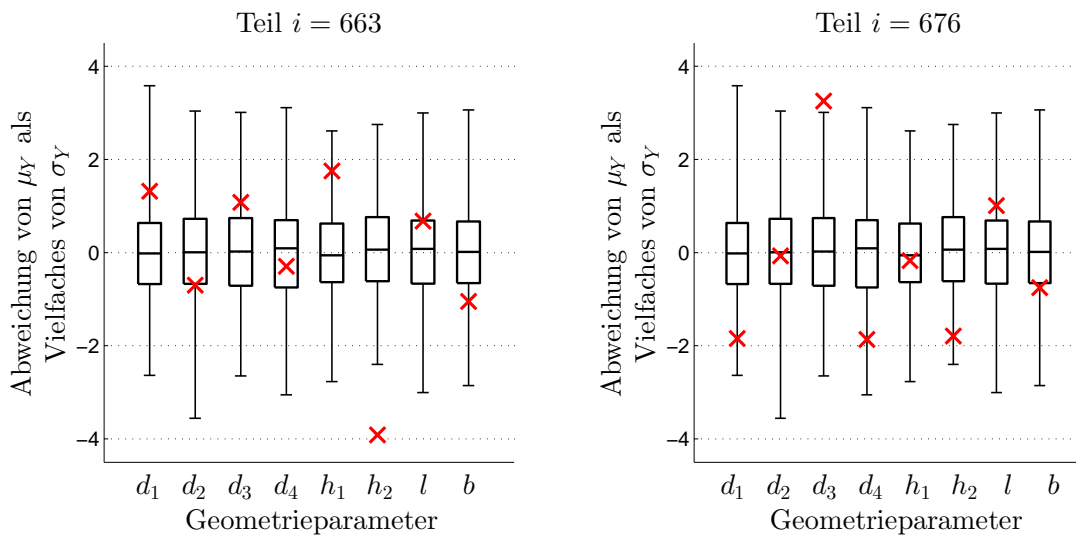


Abbildung 7.1: Darstellung aller acht tatsächlichen Abmessungen der Teile mit den Nummern $i = 663$ und $i = 676$ bzgl. der acht Geometrieparameter im Vergleich zu den entsprechenden Abmessungen der $n_{cal} = 600$ Kalibrierteile. Die tatsächlichen Abmessungen der beiden genannten Teile sind mit roten Punkten, die entsprechenden Abmessungen der Kalibrierteile mit Hilfe von Boxplots dargestellt. Die gezeigten Abmessungen verstehen sich als standardnormalverteilte Zufallszahlen, zur entsprechenden Transformation der (normalverteilten) Abmessungen diente Gl. (A.13). Somit sind für alle Abmessungen ihre Abweichungen vom jeweiligen Erwartungswert μ_Y als Vielfaches der jeweiligen Standardabweichung σ_Y angegeben. Die Variablen μ_Y und σ_Y entsprechen dabei den Standardabweichungen und Erwartungswerten aus Kapitel 5.1.

Auch mit Hilfe dieser umfangreicheren Regressionsfunktionen wurden Schätzwerte für die tatsächlichen Abmessungen der $n_{val} = 200$ Validierteile errechnet. Diese Schätzwerte galt es ebenfalls mit Hilfe der in Kapitel 5.3.2 beschriebenen Kennwerte zu analysieren (sie-

he Anhang A.6). Es zeigte sich, dass diese Schätzwerte die tatsächlichen Abmessungen der Teile noch besser widerspiegeln, als die mit Hilfe der ursprünglichen Regressionsfunktionen ermittelten Schätzwerte. Konkret verringerten sich durch die umfangreicheren Regressionsfunktionen i. d. R. die Fehler zwischen den tatsächlichen Abmessungen und den Schätzwerten. Beispielsweise konnte für die Geometrieparameter d_2 bzw. d_4 der Validierteile der mittlere Fehler $|\bar{e}|$ von 0,401 % auf 0,232 % bzw. von 0,465 % auf 0,227 % reduziert werden. Analog reduzierten sich die Maximalfehler $|e_i|_{max}$ für die Geometrieparameter d_4 bzw. l von 5,169 % auf 1,996 % bzw. von 3,215 % auf 1,121 %. Weiterhin sei erwähnt, dass die umfangreicheren Regressionsfunktionen dazu führen, dass für deutlich weniger Teile verhältnismäßig große Fehler zu beobachten sind. Beispielsweise weisen nun lediglich insgesamt 4 (anstatt 17) Teile bzgl. des Geometrieparameters d_4 einen Fehler $|e_i|$ über 1 % auf. Eine verbesserte eigenfrequenzbasierte Geometrieabschätzung konnte für die Pleuelstange alternativ auch durch Berücksichtigung der ersten $m = 22$ Eigenfrequenzen bis 40 kHz (anstatt der ersten $m = 17$ Eigenfrequenzen bis 30 kHz) bei den Regressionsrechnungen erreicht werden. Das Potential der eigenfrequenzbasierten Geometrieabschätzung kann also durch umfangreichere Regressionsfunktionen sowie durch die zusätzliche Berücksichtigung hochfrequenter Eigenmoden deutlich verbessert werden.

Letztendlich ist festzuhalten, dass die eigenfrequenzbasierte Geometrieabschätzung zumindest für die Pleuelstangen zu sehr zufriedenstellenden Resultaten führte. Trotzdem besteht weiteres Optimierungspotential.

7.2 Diskussion des Regressionsmodells

Die in dieser Arbeit vorgestellte eigenfrequenzbasierte Geometrieabschätzung basiert auf multipler linearer Regressionsanalyse, mit der geeignete Zusammenhänge (Regressionsfunktionen) zwischen den tatsächlichen Abmessungen (Zielgrößen) der Pleuelstangen und ihren ersten Eigenfrequenzen bis 30 kHz bestimmt wurden. Die Regressionsanalysen basieren dabei auf dem in Kapitel 5.3.2 gezeigten Modell, das im Wesentlichen einem Standardregressionsmodell entspricht. Dieses erfordert einige Annahmen (siehe Kapitel 3.4). Im Folgenden wird diskutiert, ob bei den Untersuchungen ggf. eine oder mehrere Annahmen verletzt wurden und welche Konsequenzen daraus resultieren.

Zunächst wird analysiert, ob das genutzte Modell fehlspezifiziert wurde, also ob die *A-Annahmen* (siehe Kapitel 3.4) verletzt wurden. Diese setzen voraus, dass das Modell die Realität funktional korrekt wiedergibt. Für die Untersuchungen wurde angenommen,

dass funktionale Zusammenhänge zwischen den geometrischen Abmessungen (Zielgrößen) eines Körpers und seinen Eigenfrequenzen (Eingangsgroßen) existieren. In der Realität besteht jedoch genau der umgekehrte Zusammenhang. Die exakte Geometrie eines Körpers hängt nicht von seinen Eigenfrequenzen, sondern diese hängen von der exakten Geometrie (und den Materialeigenschaften sowie den Randbedingungen) ab (siehe Kapitel 1 und Kapitel 1.2.2). Daher könnte argumentiert werden, dass das verwendete Modell überhaupt nicht in der Lage sein kann die Realität darzustellen, da eine entsprechende Realität nicht existiert. Somit kann das Modell auch nicht gegenüber der Realität fehlspezifiziert sein. Andererseits könnte die tatsächliche Ursache-Wirkungsbeziehung vernachlässigt und die Problemstellung mathematisch abstrakt betrachtet werden. In diesem Sinne wäre das Modell zumindest dann nicht fehlspezifiziert, wenn entsprechende Zusammenhänge in der Realität beobachtbar wären. Davon kann (zumindest für die konkreten Untersuchungen) ausgegangen werden. Denn die auf Basis des verwendeten Modells durchgeführten Untersuchungen führten zu sehr positiven Ergebnissen (siehe Kapitel 7.1).

In Kapitel 7.1 wurde darauf hingewiesen, dass der für die Untersuchungen genutzte schrittweise Regressionsalgorithmus auf maximal 20 Schritte begrenzt wurde. Daher können in einem Modell (bzw. in einer Regressionsfunktion) maximal 20 Eingangsgroßen (sowie eine Konstante) berücksichtigt werden. Ergänzende Untersuchungen führten jedoch zur Aufnahme einer größeren Anzahl an Eigenfrequenzen, nachdem maximal 40 anstatt 20 Schritte erlaubt wurden. Daraus wird geschlossen, dass bei den ursprünglichen Untersuchungen möglicherweise eine Verletzung der Annahme A1 vorlag. Diese fordert u. a., dass im Modell keine relevanten Eingangsgroßen fehlen. Eine Verletzung dieser Annahme kann zu verzerrten Schätzern oder wertlosen Hypothesentests führen [von Auer 2011].

Eine Gegenüberstellung der tatsächlichen Abmessungen aller 800 betrachteten Pleuelstangen und ihrer Eigenfrequenzen zeigte, dass die beobachtbaren Zusammenhänge (eventuell da die Geometrievariationen zwischen den Teilen verhältnismäßig gering gewählt wurden) zumindest näherungsweise als linear angesehen werden können. Die entsprechende Annahme A2 scheint also nicht verletzt. Auch von einer Verletzung der Annahme A3 wird nicht ausgegangen. Denn alle in der Arbeit betrachteten Pleuelstangen stammen aus derselben Grundgesamtheit, es liegen also keine zeitlichen Drifts o. ä. vor, die den Wirkzusammenhang hätten beeinflussen können. Außerdem ist auf Basis von Kapitel 7.1 ersichtlich, dass das genutzte Standardmodell mit konstanten Modellparametern (zumindest für die meisten Teile) zu guten Resultaten führte. Beim Einsatz der eigenfrequenzbasierten Geometrieabschätzung in der Praxis können sich die Wirkzusammenhänge jedoch sehr

wohl (z. B. auf Grund von Chargeneinflüssen oder systematischen Drifts) verändern (vgl. Kapitel 7.3), sodass Annahme A3 ggf. verletzt wird.

Die *B-Annahmen* fordern im Wesentlichen, dass die im Modell enthaltene Störgröße für alle Beobachtungen identisch mit einem Erwartungswert von 0 und einer konstanten Varianz normalverteilt ist (siehe Kapitel 3.4). Insbesondere wird für das Standardmodell vorausgesetzt, dass die Störgröße stets unterschiedliche (entsprechend normalverteilte) Werte bei wiederholter Berücksichtigung identischer Werte der Eingangsgrößen aufweist. Die Untersuchungen dieser Arbeit erfolgten jedoch ausschließlich anhand virtueller Teile, deren tatsächliche Abmessungen und Eigenfrequenzen mit Zufallszahlen erzeugt bzw. numerisch berechnet wurden. Solche Eigenfrequenzberechnungen führen bei wiederholter Durchführung für ein Teil mit konstanten Abmessungen im Wesentlichen zu konstanten Eigenfrequenzen. Für z. B. zwei geometrisch exakt identische Teile ergeben sich also näherungsweise dieselben Eigenfrequenzen. Daraus wird letztendlich gefolgert, dass die Störgröße (für identische Eigenfrequenzen, also für identische Werte der Eingangsgrößen) näherungsweise konstant bzw. i. d. R. zumindest keinen Erwartungswert von 0 sowie eine sehr geringe Varianz aufweist. Für jede unterschiedliche Kombination der Eigenfrequenzen (also für jedes unterschiedliche Teil) weist die Störgröße jedoch einen anderen Erwartungswert auf, mit dem Modell wird also für jedes Teil ein anderer systematischer Fehler begangen. Übergreifend über alle Teile erscheint es daher dennoch so, dass die Störgröße näherungsweise mit einem Erwartungswert von 0 und einer konstanten Varianz normalverteilt ist. Dies konnte Anhand von Abbildung 6.1 bis Abbildung 6.8 sowie mit verschiedenen hier nicht näher thematisierten Diagrammen festgestellt werden. Dies ist jedoch auf die zufällige Teileauswahl zurückzuführen. Inwiefern die teileübergreifende Verteilung der (jeweils lokal systematischen) Störgrößen die Verletzung der B-Annahmen verhindert, kann im Rahmen dieser Arbeit nicht analysiert werden. Letztendlich wird in dieser Arbeit also nicht geklärt, inwiefern die B-Annahmen bei den Untersuchungen verletzt wurden und welche Konsequenzen daraus resultieren.

Zuletzt wird auf die *C-Annahmen* eingegangen (siehe Kapitel 3.4). Die Annahme C1 fordert, dass die Eingangsgrößen keine Zufallsgrößen sind, sondern kontrolliert werden können. In dieser Arbeit wurden jedoch zufällig Pleuelstangen aus einer Grundgesamtheit ausgewählt. Somit können deren Eigenfrequenzen nicht kontrolliert werden, sondern weisen zufällige (von der zufälligen Teileauswahl abhängige) Werte auf und sind nach dieser Interpretation Zufallsgrößen. Zumindest für ein konkretes Teil sind die Eigenfrequenzen jedoch bei wiederholter Bestimmung als konstant und nicht zufällig anzusehen. Welche die-

ser Interpretationen nun aus statistischer Sicht korrekt ist, kann nur nach tiefgreifenden Literaturrecherchen bzw. statistischen Betrachtungen entschieden werden. Unabhängig davon kann die Annahme C1 unter gewissen Randbedingungen abgeschwächt werden, so dass trotz zufälliger Eingangsgrößen vor allem bei großem Stichprobenumfang die Schätzer und Hypothesentests näherungsweise ihre Gültigkeit behalten [von Auer 2011].

Annahme C2 fordert, dass die Eingangsgrößen (also die Eigenfrequenzen) nicht perfekt multikollinear sind. Bei der Analyse der verfügbaren Daten zeigte sich wie erwartet, dass tatsächlich keine Multikollinearität vorliegt, obwohl die meisten der Eigenfrequenzen i. d. R. deutlich miteinander korrelieren. Selbst unter der Annahme, dass zwei oder mehr Eingangsgrößen näherungsweise perfekt miteinander korrelieren, kann dies vom verwendeten Regressionsalgorithmus kompensiert werden (siehe Kapitel 5.3.2). Eine Verletzung der Annahme C2 ist daher nicht zu erwarten.

Es muss also davon ausgegangen werden, dass zahlreiche der geforderten Annahmen in dieser Arbeit verletzt wurden und das verwendete Standardmodell nicht dem korrekten Modell entspricht. Als Folgen daraus sind u. a. verzerrte, inkonsistente oder ineffiziente Schätzer sowie wertlose Hypothesentests zu nennen. Trotzdem wurde das Standardmodell genutzt, da schlichtweg kein korrektes Alternativmodell zur Verfügung stand. Falls die entsprechenden Zusammenhänge überhaupt durch ein einfaches Modell korrekt beschrieben werden können, sind zur Aufstellung eines solchen Modells wegen der Komplexität der Problemstellung weitere Arbeiten nötig. Davon abgesehen führte das Standardmodell zu sehr guten Resultaten (siehe Kapitel 7.1), sodass seine ersatzweise Nutzung zu rechtfertigen. Dennoch wird bei der Modellierung der Problemstellung noch ein Potential zur Optimierung der eigenfrequenzbasierten Geometrieabschätzung gesehen. Weiterhin besteht große Hoffnung, das Verfahren mit zusätzlichen Mustererkennungs- oder Klassifikationsalgorithmen in die richtige Richtung weiterentwickeln zu können.

7.3 Anwendung des Verfahrens in der Praxis

Für die Umsetzung einer eigenfrequenzbasierten Geometrieabschätzung spielt die Messtechnik eine entscheidende Rolle. Eine Möglichkeit zur praktischen Bestimmung von Eigenfrequenzen ist in Kapitel 1.2.2 beschrieben. In einigen Fällen jedoch, z. B. falls zwei oder mehr Eigenfrequenzen sehr dicht zusammen liegen, ist die Ermittlung der Eigenfrequenzen ggf. mit Problemen verbunden. Um solchen Störeffekten entgegenzuwirken und möglichst alle Eigenfrequenzen bestimmen und damit nutzen zu können, ist die Verwen-

derung geeigneter Mess- und Signalverarbeitungstechnik nötig. Davon abgesehen ist ein Versuchsaufbau zur Bestimmung der Eigenfrequenzen so zu wählen, dass möglichst viele Eigenfrequenzen angeregt und erfasst werden können. In diesem Sinne sind vor allem die Art, die Position und die Orientierung der Schwingungsanregung und der Signalerfassung zu optimieren. Zur Realisierung einer breitbandigen und hochfrequenten Anregung könnten z. B. Piezoaktoren genutzt werden; zur Signalerfassung könnte beispielsweise Hochfrequenzmesstechnik zum Einsatz kommen. Außerdem könnte in Abhängigkeit der Teilegeometrie mit Hilfe von FEM-Simulationen eine optimierte Bauteillagerung und Anregeposition bestimmt werden. Auch eventuelle Umgebungseinflüsse wie Umgebungslärm sind zu kompensieren (z. B. durch eine Einhausung des Prüfsystems).

Wie bereits in Kapitel 7.1 erwähnt wurde, konnten in dieser Arbeit die tatsächlichen Abmessungen zahlreicher virtueller Pleuelstangen unter Berücksichtigung ihrer Eigenfrequenzen erfolgreich (i. d. R. mit geringem Fehler) abgeschätzt werden. Den insgesamt 8 zu schätzenden bzw. zufällig variierenden Abmessungen standen dabei 17 Eigenfrequenzen gegenüber. Die Anzahl verfügbarer Eigenfrequenzen war somit ungefähr doppelt so groß wie die der variierenden Parameter. Auf Basis der Erkenntnisse dieser Arbeit ist davon auszugehen, dass die Anzahl der zu einer eigenfrequenzbasierten Geometrieabschätzung benötigten Eigenfrequenzen stets größer sein sollte als die Anzahl der zufällig variierenden Parameter. Vor allem ist dabei zu bedenken, dass bei realen Teilen neben den Abmessungen ggf. weitere Parameter variieren und einen Einfluss auf die Eigenfrequenzen nehmen (siehe nächster Abschnitt). Eine allgemeine Aussage hinsichtlich der erforderlichen Anzahl an Eigenfrequenzen ist daher ohne weitere Untersuchungen nicht möglich.

In dieser Arbeit erfolgten alle Untersuchungen anhand von virtuellen Teilen, die sich lediglich hinsichtlich zufälliger Geometrievariationen unterscheiden. Außerdem wurden für alle Teile dieselben homogen-isotropen Materialeigenschaften angenommen. Für reale Serienteile muss hingegen davon ausgegangen werden, dass ihre Materialeigenschaften weder exakt homogen-isotrop noch konstant sind. Auch für einen näherungsweise homogen-isotropen Werkstoff (z. B. Stahl) können bestimmte Fertigungsverfahren oder -schritte (z. B. Schmieden, Gießen) zu anisotropem Verhalten sowie zu lokal unterschiedlichen Materialeigenschaften, also zu Inhomogenitäten, führen. Zwischen nominell gleichen Teilen bestehen in der Realität also Unterschiede hinsichtlich ihrer exakten (möglicherweise anisotropen und inhomogenen) Materialeigenschaften.

Weiterhin bestand für diese Arbeit die Annahme, dass die exakte Geometrie aller Teile vollständig durch wenige Parameter beschreibbar ist. In der Realität treten neben zu

fälligen Maßabweichungen zwischen vergleichbaren Teilen jedoch auch Form- und Lageabweichungen, also geringe Abweichungen bzgl. der prinzipiellen Gestalt oder Form der Teile, auf. So sind ggf. Bohrungen in Realteilen nicht perfekt rund, ebene Flächen nicht perfekt eben, konzentrische Elemente nicht perfekt konzentrisch, parallele Flächen nicht perfekt parallel oder die Durchmesser von zylinderförmigen Elementen nicht perfekt zylinderförmig. Der Durchmesser eines zylinderförmigen Teils könnte beispielsweise über die Länge systematisch abnehmen bzw. zufällig schwanken, anstatt einer perfekt geraden Mittelachse könnte diese leicht gebogen sein etc. Außerdem ist zu erwähnen, dass in realen Teilen zusätzlich kleine makroskopische Defekte (z. B. Poren) vorhanden sein können, ohne dass die entsprechenden Teile als fehlerhaft einzustufen sind. Auch dies wurde in dieser Arbeit, genauso wie der Einfluss der Prüfobjektlagerung auf die Eigenfrequenzen, nicht berücksichtigt. Ebenso wurde für diese Arbeit angenommen, dass alle Geometrievariationen unabhängig voneinander auftreten, was in der Praxis nicht zwangsläufig erfüllt sein muss. Darüber hinaus sind in einer Serienfertigung sprungartige bzw. systematische Änderungen (z. B. aufgrund einer neuen Materialcharge oder eines Werkzeugwechsels) der geometrischen oder materialspezifischen Eigenschaften zu erwarten.

In der Praxis können also deutlich mehr und vielfältigere Einflüsse bzw. variierende Parameter vorhanden sein, die sich auf die Eigenfrequenzen auswirken. Andererseits ist zu bedenken, dass viele der in der Praxis auftretenden Variationen (z. B. globale Materialvariationen, bestimmte Form- und Lageabweichungen), genau wie die Variationen der geometrischen Abmessungen, durch einfache Parameter beschreibbar sind. Somit können die jeweiligen Einflüsse entsprechend (genau wie die Geometrievariationen der virtuellen Teile in dieser Arbeit) berücksichtigt und kompensiert werden. Jedoch erfordern Variationen zusätzlicher Parameter vermutlich eine höhere Anzahl an Eigenfrequenzen, um eine exakte Geometrie hinreichend genau abschätzen zu können. Eine wie in dieser Arbeit durchgeführte eigenfrequenzbasierte Geometrieabschätzung wird durch eine Vielzahl variierender Parameter in der Praxis also ggf. erschwert.

Im Gegensatz dazu sind Aspekte zu nennen, die evtl. den zuvor beschriebenen Problemen entgegenwirken und das vorgeschlagene Verfahren optimieren. In Kapitel 7.1 wurde bereits darauf hingewiesen, dass sowohl umfangreichere Regressionsfunktionen mit einer größeren Anzahl an Termen als auch die Berücksichtigung höherfrequenter Eigenmoden eine verbesserte eigenfrequenzbasierte Geometrieabschätzung ermöglichen können. Weiterhin wurden in dieser Arbeit in den Regressionsfunktionen lediglich Eigenfrequenzen sowie paarweise Produkte aus zwei Eigenfrequenzen genutzt. Darüber hinaus könnten zur

weiteren Optimierung zusätzliche Terme unterschiedlichster Art aufgenommen werden (z. B. Quadrate der Eigenfrequenzen, Wurzeln der Eigenfrequenzen, paarweise Differenzen zwischen Eigenfrequenzen etc.). Eine andere Idee zielt darauf ab, neben den Eigenfrequenzen eines Teils weitere Eigenschaften zu nutzen, um auf die exakten Abmessungen zu schließen. Zum Beispiel könnte als weitere Eingangsgröße in einer Regressionsfunktion die Masse berücksichtigt werden. Diese kann messtechnisch einfach und sehr genau bestimmt werden. Analog dazu erscheint es zielführend, ggf. auch einige Abmessungen mit Hilfe konventioneller Messtechnik zu bestimmen und als zusätzliche Eingangsgrößen zu nutzen. Die bisherigen Aspekte zielen darauf ab, die Anzahl der verfügbaren Eingangsgrößen und damit den Informationsgehalt zu erhöhen.

In Kapitel 7.2 wurde weiterhin festgestellt, dass bei der Modellierung der Problemstellung ebenfalls noch ein Optimierungspotential besteht. Gegebenenfalls können also die Fähigkeiten des Verfahrens mit Hilfe eines speziell angepassten Modells verbessert werden. Unterstützend oder alternativ dazu könnten weitere mathematische Verfahren sowie Klassifikations- oder Mustererkennungsalgorithmen bei einer eigenfrequenzbasierten Geometrieabschätzung zum Einsatz kommen. In diesem Zusammenhang sind z. B. neuronale Netze, Nächste-Nachbarn- oder Abstandsklassifikatoren sowie nichtlineare Regressionsverfahren zu nennen. Insbesondere in einer geschickten Signalauswertung bzw. -klassifikation wird ein großes Potential zur Optimierung gesehen.

Der Einsatz einer eigenfrequenzbasierten Geometrieabschätzung ist prinzipiell auf Basis verschiedener Vorgehensweisen bei der Kalibrierung denkbar. Zum einen könnte (wie in dieser Arbeit) eine Kalibrierung anhand von virtuellen Teilen erfolgen, bei der die Eigenfrequenzen der Teile numerisch z. B. mit der Finite-Elemente-Methode bestimmt werden. Dazu müssten jedoch die Eigenschaften der real produzierten Teile sowie deren Variationen vollständig bekannt sein, um entsprechende virtuelle Teile modellieren zu können. Die dabei zu berücksichtigenden Eigenschaften umfassen u. a. auch Form- und Lageabweichungen, anisotropes bzw. inhomogenes Materialverhalten oder die Materialdämpfung. Eine ausreichend genaue Charakterisierung und Modellierung wäre daher sehr aufwendig. Außerdem ist zu berücksichtigen, dass numerisch berechnete Eigenfrequenzen (z. B. wegen Einflüssen der Diskretisierung oder Vereinfachungen bzw. Fehlern bei der Modellierung) stets von entsprechenden gemessenen Eigenfrequenzen abweichen. Zur Kompensation dessen wurden bereits Überlegungen angestellt. Beispielsweise könnten anstelle von absoluten Eigenfrequenzen, die stark von der Diskretisierung abhängen, relative Abweichungen der Eigenfrequenzen von den Sollwerten eines perfekten Teils genutzt werden.

Zum anderen könnte eine Kalibrierung mit Hilfe von realen Serienteilen erfolgen. Dazu müssten lediglich die relevanten (später abzuschätzenden oder als Eingangsgrößen benötigten) Abmessungen zahlreicher Teile sowie deren Eigenfrequenzen messtechnisch bestimmt werden. Alle anderen Variationen der Teile sind als Störeinflüsse zu behandeln. Dies hätte einen deutlich geringeren Kalibrieraufwand zur Folge. Außerdem wäre sichergestellt, dass (falls keine wesentlichen Chargeneinflüsse auftreten) zwischen den Kalibrierteilen sowie den später zu prüfenden Teilen keine wesentlichen Unterschiede bestünden. Weiterhin könnten zusätzliche Eingangsgrößen wie die Amplituden oder Halbwertsbreiten der Eigenfrequenzen (bzw. der entsprechenden Peaks) genutzt werden. Um darüber hinaus systematische Chargeneinflüsse zu kompensieren oder den Kalibrierbereich zu erweitern (vgl. die in Kapitel 7.1 erwähnte Problematik), könnte ggf. eine kombinierte Kalibrierung anhand von realen sowie virtuellen Teilen erfolgen. Auch dazu wurden bereits im Rahmen dieser Arbeit konkrete Überlegungen angestellt. Eine Idee zielt beispielsweise darauf ab, die Eigenfrequenzen zahlreicher virtueller Teile (wie in dieser Arbeit) unter Berücksichtigung großzügig angenommener, zufälliger Geometrievariationen numerisch zu berechnen. Die so bestimmten Eigenfrequenzen könnten anschließend linear so verschoben werden, dass sie im Mittel mit gemessenen Eigenfrequenzen entsprechender Realteile übereinstimmen.

Auf Basis der Ausführungen wird eine eigenfrequenzbasierte Geometrieabschätzung insbesondere für geometrisch einfache (metallische oder keramische) Serienteile als sinnvoll erachtet. Denn zum einen sind diese auf Grund ihrer einfacheren Geometrie i. d. R. durch eine geringere Anzahl variierender Parameter gekennzeichnet. Zum anderen sind solche Teile durch wenige Parameter bzw. Abmessungen beschreibbar, was generell den erforderlichen Kalibrieraufwand reduziert. Weiterhin von Vorteil wäre es, falls zwischen den genutzten nominell gleichen Teilen starke Geometrievariationen bestünden, sonstige Variationen jedoch weitestgehend vernachlässigbar wären. Denn in diesem Fall ist die Anzahl variierender Parameter gering. Außerdem sollten die Teile eine ausreichende Anzahl messtechnisch bestimmbarer Eigenfrequenzen aufweisen.

Abschließend wird eine Idee beschrieben, wie mit einer Kombination aus einer konventionellen Geometrievermessung sowie einer eigenfrequenzbasierten Geometrieabschätzung möglicherweise makroskopische Defekte trotz starker Geometrievariationen zwischen nominell gleichen Teilen erkannt werden können. Unbedingte Voraussetzung dafür ist jedoch, dass das vorgeschlagene (oder ein ähnliches) Verfahren im Anschluss an eine Kalibrierung geeignet ist, um die geometrischen Abmessungen der Teile anhand ihrer Eigenfrequenzen

verlässlich und hinreichend genau abzuschätzen. Weiterhin ist erforderlich, dass bei der Kalibrierung nur Teile ohne nennenswerte makroskopische Defekte berücksichtigt werden. Die Idee basiert im Wesentlichen darauf, ergänzend zur eigenfrequenzbasierten Geometrieabschätzung einige der Abmessungen eines zu untersuchenden Teils hochgenau mit Hilfe von konventioneller mechanischer oder optischer Messtechnik zu bestimmen. Zwischen den konventionell gemessenen Abmessungen und den anhand der Eigenfrequenzen abgeschätzten Abmessungen eines Teils sollten keine wesentlichen Unterschiede bestehen, sofern das entsprechende Teil frei von nennenswerten makroskopischen Defekten ist und die eigenfrequenzbasierte Geometrieabschätzung verlässlich funktioniert. Befinden sich in einem Teil jedoch ein oder mehrere makroskopische Defekte, beeinflussen diese (ebenso wie zufällige Geometrievariationen) die Eigenfrequenzen des Teils. Folglich sollten zwischen den konventionell gemessenen Abmessungen und den anhand der Eigenfrequenzen abgeschätzten Abmessungen eines defekten Teils deutliche Unterschiede bestehen. Über den Vergleich von konventionell gemessenen und eigenfrequenzbasiert abgeschätzten Abmessungen könnte also möglicherweise trotz starker Geometrievariationen auf Defekte geschlossen werden. Der Einfluss von Geometrievariationen auf die Eigenfrequenzen könnte somit ggf. eliminiert bzw. deutlich abgeschwächt werden.

Zusammenfassend bleibt festzuhalten, dass berechtigte Hoffnungen bestehen, dass in dieser Arbeit genutzte Verfahren zur eigenfrequenzbasierten Geometrieabschätzung in der Praxis einsetzen zu können. Zwar wurden einige Probleme und Hindernisse erkannt, die die praktische Anwendung des Verfahrens erschweren. Doch es konnten auch zahlreiche Ideen und Lösungsvorschläge präsentiert werden, um den Unwägbarkeiten entgegenzuwirken und das Potential des vorgeschlagenen Verfahrens zu steigern. Außerdem konnte eine Idee zur Erkennung fehlerhafter Teile in einer Serienfertigung ausgearbeitet werden. Letztendlich sind jedoch bis zum praktischen Einsatz einer eigenfrequenzbasierten Geometrieabschätzung noch umfangreiche Untersuchungen erforderlich.

8 Zusammenfassung

Im Rahmen dieser Arbeit wurden mit Hilfe von multipler linearer Regressionsanalyse Untersuchungen zur Abschätzung der geometrischen Abmessungen eines zufällig aus einer Grundgesamtheit ausgewählten Teils anhand seiner Eigenfrequenzen durchgeführt. Die Untersuchungen erfolgten anhand zahlreicher Pleuelstangen aus derselben Grundgesamtheit, wobei die Teile geometrisch vollständig durch insgesamt acht Geometrieparameter (z. B. Durchmesser oder Länge) beschrieben werden können. Da für diese Arbeit keine realen Pleuelstangen zur Verfügung standen, wurden virtuelle Teile genutzt. Um zufällige, fertigungstechnologisch bedingte Geometrievariationen zwischen den Teilen zu berücksichtigen und damit einen Bezug zur Realität herzustellen, wurden die tatsächlichen Abmessungen der virtuellen Pleuelstangen mit normalverteilten Zufallszahlen beschrieben. Die Bestimmung der von der jeweils exakten Teilegeometrie abhängigen Eigenfrequenzen erfolgte numerisch mit der Finite-Elemente-Methode.

Vor den eigentlichen Untersuchungen wurde u. a. die Problematik von Geometrievariationen zwischen nominell gleichen Teilen dargestellt, der Stand der Technik sowie die erforderlichen theoretischen Grundlagen aufgearbeitet und ein Lösungsansatz entwickelt. Daraufhin wurden die betrachteten Pleuelstangen definiert und die Untersuchungen detailliert geplant. Im Rahmen der Untersuchungen selbst wurden anhand von 600 Teilen zunächst geeignete lineare Zusammenhänge zwischen den exakten Abmessungen der Pleuelstangen sowie ihren ersten 17 Eigenfrequenzen bis 30 kHz bestimmt. Die Ermittlung der Zusammenhänge erfolgte mit multipler linearer Regressionsanalyse. Eine solche Kalibrierung wurde für jeden der acht Geometrieparameter durchgeführt; aus der entsprechenden Regressionsrechnung resultierte jeweils ein Bestimmtheitsmaß von deutlich über 0,99.

Anschließend wurden auf Basis der ermittelten Zusammenhänge Schätzwerte für die tatsächlichen Abmessungen weiterer 200 (zuvor nicht betrachteter) Teile bestimmt. Mit Hilfe von Kennwerten und Diagrammen konnte die Qualität der ermittelten Schätzwerte unter Berücksichtigung der tatsächlichen Abmessungen getrennt für jeden Geometrieparameter bewertet werden. Dabei zeigte sich, dass die tatsächlichen Abmessungen und die entsprechenden Schätzwerte für die meisten Teile sehr gut übereinstimmten bzw. zwischen ihnen

ein sehr hoher linearer Zusammenhang bestand. Die Fehler zwischen den tatsächlichen Abmessungen und den Schätzwerten waren in der Regel sehr gering. Je nach Geometrieparameter lag der mittlere Fehler zwischen lediglich ca. 0,001 mm und ca. 0,006 mm. Prozentual bezogen auf den jeweils wesentlichen Wertebereich der Abmessungen ergab sich für jeden Geometrieparameter ein mittlerer Fehler von unter 0,5 %. Lediglich für einige Teile wurden vergleichsweise große Fehler zwischen den tatsächlichen Abmessungen und den Schätzwerten beobachtet. Es wiesen jedoch nur fünf Teile mindestens einen prozentualen Fehler von über 2 % auf. Der Maximalwert betrug dabei knapp 5,2 %. Die vergleichsweise großen Fehler wurden auf extreme Abmessungen der entsprechenden Pleuelstangen zurückgeführt, die nicht durch die zuvor ermittelten Zusammenhänge abgedeckt waren. Hingegen wies die Mehrheit der Teile prozentuale Fehler von unter 1 % bzgl. aller acht Geometrieparameter auf. Für jeden Geometrieparameter wurde darüber hinaus ein Korrelationskoeffizient zwischen den tatsächlichen Abmessungen und den Schätzwerten von über 0,999 ermittelt. Mit Hilfe umfassenderer Zusammenhänge (z. B. mit einer größeren Anzahl an Eingangsgrößen) konnten die Ergebnisse weiter verbessert werden.

Ergänzend zur Diskussion der Untersuchungsergebnisse erfolgte eine Analyse und Bewertung des genutzten Regressionsmodells. Dabei wurde erkannt, dass bei der Modellierung der Problemstellung noch ein Optimierungspotential besteht. Letztendlich könnte die Abschätzung der geometrischen Abmessungen eines Teils anhand seiner Eigenfrequenzen möglicherweise mit Hilfe einer angepassten Modellgleichung bzw. mit zusätzlichen Mustererkennungs- oder Klassifikationsalgorithmen weiter verbessert werden. Weiterhin wurde herausgearbeitet, unter welchen Bedingungen das genutzte Verfahren in der Praxis für Realteile einsetzbar ist. Dabei zeigte sich, dass bis zur Praxistauglichkeit noch einige Probleme und Hürden zu überwinden sind. Denn in der Praxis treten z. B. Störeffekte auf, die im Rahmen dieser Arbeit vernachlässigt wurden. Es wurden jedoch bereits zahlreiche Ansätze und Ideen aufgezeigt, auf Basis derer den Unwägbarkeiten entgegengewirkt und die praktische Umsetzung vorangetrieben werden könnte. Zusätzlich wurde eine Idee präsentiert, wie mit einer Kombination aus konventioneller Geometrievermessung und einer eigenfrequenzbasierten Geometrieabschätzung ggf. makroskopische Defekte in einer Serienfertigung trotz Geometrievariationen erkannt werden könnten.

Es bleibt festzuhalten, dass das genutzte Verfahren für die virtuellen Pleuelstangen zu sehr guten Resultaten führte. Inwiefern das Verfahren letztendlich auch für Realteile eingesetzt werden könnte, muss mit Hilfe weiterer Untersuchungen geklärt werden.

Literaturverzeichnis

[ASTM 2008]

ASTM-Richtlinie ASTM E 2001:2008 (Juli 2008). *Standard Guide for Resonant Ultrasound Spectroscopy for Defect Detection in Both Metallic and Non-Metallic Parts*. ASTM International, West Conshohocken, PA

[ASTM 2009]

ASTM-Richtlinie ASTM E 1876:2009 (April 2009). *Standard Test Method for Dynamic Young's Modulus, Shear Modulus, and Poisson's Ratio by Impulse Excitation of Vibration*. ASTM International, West Conshohocken, PA

[von Auer 2011]

AUER, L. von: *Ökonometrie: Eine Einführung*. 5. Auflage. Springer, Berlin, 2011. ISBN 978-3-642-19994-3

[COMSOL-DOC 2012]

Dokumentation der Software *COMSOL Multiphysics*, Version 4.3 (4.3.0.233). COMSOL AB, 2012. (Dokumentation abrufbar über: *COMSOL Multiphysics* → *Help* → *Documentation*)

[DGZfP 2009]

DGZfP-Richtlinie US 6 (Dezember 2009). *Richtlinie US 6: Akustische Resonanzverfahren zur Zerstörungsfreien Prüfung: Prinzip, Vorgehensweise, Merkmale, Validierung*. Deutsche Gesellschaft für Zerstörungsfreie Prüfung e. V. (DGZfP), Unterausschuss Akustische Resonanzverfahren im DGZfP-Fachausschuss Ultraschallprüfung, Berlin. ISBN 978-3-940283-23-8

[DIN 1991]

DIN-Norm DIN ISO 2768-1:1991-06 (Juni 1991). *Allgemeintoleranzen; Toleranzen für Längen- und Winkelmaße ohne einzelne Toleranzeintragung; Identisch mit ISO 2768-1:1989*

[DIN 2007]

DIN-Norm DIN EN ISO 12680-1:2007-05 (Mai 2007). *Verfahren zur Prüfung von feuerfesten Erzeugnissen – Teil 1: Bestimmung des dynamischen E-Moduls durch Schwingungs-Impulsanregung (ISO 12680-1:2005); Deutsche Fassung EN ISO 12680-1:2007*

[Draper 1998]

DRAPER, N. R. ; SMITH, H.: *Applied Regression Analysis*. 3. Auflage. Wiley, New York, 1998. ISBN 978-0-471-17082-2

[Gehr 2007]

GEHR, F. ; HELLINGRATH, B.: *Logistik in der Automobilindustrie: Innovatives Supply Chain Management für wettbewerbsfähige Zulieferstrukturen*. Springer, Berlin, 2007. ISBN 978-3-540-14045-0

[Gonçalves 2007]

GONÇALVES, P. J. P. ; BRENNAN, M. J. ; ELLIOTT, S. J.: Numerical evaluation of high-order modes of vibration in uniform Euler-Bernoulli beams. In: *Journal of Sound and Vibration* 301 (2007), Nr. 3-5, S. 1035 bis 1039. ISSN 0022-460X

[Heinhold 1979]

HEINHOLD, J. ; GAEDE, K.-W.: *Ingenieur-Statistik*. 4. Auflage. Oldenbourg, München, 1979. ISBN 978-3-486-31744-2

[Henze 2012]

HENZE, N.: *Stochastik für Einsteiger: Eine Einführung in die faszinierende Welt des Zufalls*. 9. Auflage. Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2012. ISBN 978-3-8348-1845-4

[Hertlin 2003]

HERTLIN, I.: *Informationsschriften zur zerstörungsfreien Prüfung – ZfP kompakt und verständlich. Band 5: Akustische Resonanzanalyse*. Castell, Wuppertal, 2003. ISBN 978-3-934255-06-7

[Hertlin 2009]

HERTLIN, I.: Lage- und Größenbestimmung vs. physikalisches Prinzip: Vergleich und Auswahl zerstörungsfreier Werkstoffprüfverfahren. In: *Giesserei-Erfahrungsaustausch* 53 (2009), Nr. 1-2, S. 6 bis 11

[Jann 2005]

JANN, B.: *Einführung in die Statistik*. 2. Auflage. Oldenbourg, München, 2005. ISBN 978-3-486-57687-0

[Kokavec 2010]

KOKAVECZ, J.: Modalanalyse. In: MÖSER, M. (Hrsg.): *Messtechnik der Akustik*. Springer, Berlin, 2010. ISBN 978-3-540-68086-4, S. 499 bis 535

[Lai 2011]

LAI, C. ; SUN, X. ; DASCH, C. ; HARMON, G. ; JONES, M.: Quantify Resonance Inspection With Finite Element-Based Modal Analyses. In: *Journal of Vibration and Acoustics* 133 (2011), Nr. 3, S. 031004-1 bis 031004-9. ISSN 1048-9002

[Lai 2012]

LAI, C. ; XU, W. ; SUN, X.: Development of an Inverse Algorithm for Resonance Inspection. In: *Journal of Vibration and Acoustics* 134 (2012), Nr. 5, S. 051017-1 bis 051017-10. ISSN 1048-9002

[Lauwagie 2010]

LAUWAGIE, T. ; VANHOLLEBEKE, F. ; PLUYMERS, B. ; ZEGELS, R. ; VERSCHUEREN, P. ; DASCOTTE, E.: The Impact of High-Fidelity Model Geometry on Test-Analysis Correlation and FE Model Updating Results. In: SAS, P. (Hrsg.) ; BERGEN, B. (Hrsg.): *Proceedings of ISMA2010 including USD2010*, 2010. 24th International Conference on Noise and Vibration Engineering (ISMA2010), Katholieke Universiteit, Leuven, 22. bis 24. September 2010. ISBN 978-90-738-0287-2, S. 2679 bis 2688

[Lindner 2006]

LINDNER, H. ; SIEBKE, W. ; SIMON, G. ; WUTTKE, W.: *Physik für Ingenieure*. 17. Auflage. Carl Hanser, München, 2006. ISBN 978-3-446-40609-4

[Martinček 1963]

MARTINČEK, G.: Die Bestimmung der Elastizitätsmoduln aus Eigenschwingungen von Würfeln und kurzen Prismen. In: *Acustica* 13 (1963), Nr. 3, S. 123 bis 130

[MATLAB-DOC 2012]

Dokumentation der Software *MATLAB*, Version R2012a (7.14.0.739). The MathWorks, Inc., 2012. (Dokumentation abrufbar über: *MATLAB* → *Help* → *Product Help*)

[Migliori 2001]

MIGLIORI, A. ; DARLING, T. W. ; BAIARDO, J. P. ; FREIBERT, F.: Resonant Ultrasound Spectroscopy (RUS). In: EVERY, A. G. (Hrsg.) ; SACHSE, W. (Hrsg.): *Handbook of Elastic Properties of Solids, Liquids and Gases. Volume 1: Dynamic Methods for Measuring the Elastic Properties of Solids*. Academic Press, San Diego, 2001. ISBN 978-0-124-45761-4, S. 239 bis 262

[Migliori 1997]

MIGLIORI, A. ; SARRAO, J. L.: *Resonant Ultrasound Spectroscopy: Applications to Physics, Material Measurements, and Nondestructive Evaluation*. Wiley, New York, 1997. ISBN 978-0-471-12360-6

[Mittag 2011]

MITTAG, H.-J.: *Statistik: eine interaktive Einführung*. Springer, Berlin, 2011. ISBN 978-3-642-17846-7

[Möser 2009]

MÖSER, M.: *Technische Akustik*. 8. Auflage. Springer, Berlin, 2009. ISBN 978-3-540-89817-7

[Möser 2010]

MÖSER, M. ; KROPP, W. ; CREMER, L. ; HECKL, M.: *Körperschall: Physikalische Grundlagen und Technische Anwendungen*. 3. Auflage. Springer, Berlin, 2010. ISBN 978-3-540-40336-4

[NDE701 2009]

Jährlicher Fortschrittsbericht zum Projekt NDE701 (Dezember 2009). *Enhanced Resonance Inspection for Light Metal Castings (NDE701)*. In: *FY 2008 Progress Report for Lightweighting Materials*. U. S. Department of Energy, Office of Energy Efficiency and Renewable Energy, Washington DC. (Dokument abrufbar über http://www1.eere.energy.gov/vehiclesandfuels/resources/fcvt_reports.html, S. 10-23 bis 10-30)

[NDE901 2012]

Jährlicher Fortschrittsbericht zum Projekt NDE901 (Februar 2012). *NDE901-Reliability Tools for Resonance Inspection of Light Metal Castings*. In: *FY 2011 Progress Report for Lightweighting Materials*. U. S. Department of Energy, Office of Energy Efficiency

and Renewable Energy, Washington DC. (Dokument abrufbar über http://www1.eere.energy.gov/vehiclesandfuels/resources/fcvt_reports.html, S. 4–74 bis 4–77)

[Papula 2011]

PAPULA, L.: *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler. Band 3: Vektoranalysis, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Mathematische Statistik, Fehler- und Ausgleichsrechnung*. 6. Auflage. Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2011. ISBN 978–3–8348–1227–8

[Richter 1999]

RICHTER, H.-U. ; DEUTSCHE GESELLSCHAFT FÜR ZERSTÖRUNGSFREIE PRÜFUNG E. V. (DGZFP) (Hrsg.): *Chronik der zerstörungsfreien Materialprüfung*. DVS, Berlin, 1999. ISBN 978–3–87155–942–6

[Schlittgen 2003]

SCHLITTFEN, R.: *Einführung in die Statistik: Analyse und Modellierung von Daten*. 10. Auflage. Oldenbourg, München, 2003. ISBN 978–3–486–27446–2

[Schmidt 2002]

SCHMIDT, L. ; STEINBUCH, R.: Improved Interpretation of the Acoustic Response Spectrum to Identify Types of Component Deviations. In: *Research in Nondestructive Evaluation* 14 (2002), Nr. 2, S. 95 bis 110. ISSN 0934–9847

[Statistisches Bundesamt 2012]

STATISTISCHES BUNDESAMT (Hrsg.): *Statistisches Jahrbuch 2012: Deutschland und Internationales*. Statistisches Bundesamt, Wiesbaden, 2012. ISBN 978–3–8246–0990–1. (Dokument abrufbar über <https://www.destatis.de>)

[Steinbuch 2004]

STEINBUCH, R.: Scatter or Defect? Some Remarks on the Interpretation of Acoustic Spectral Shift. In: *Research in Nondestructive Evaluation* 15 (2004), Nr. 4, S. 173 bis 189. ISSN 0934–9847

[Steinbuch 2006]

Patentschrift DE 101 37 364 B4: *Quantifizierung von Bauteildeviationen aus Spektralverschiebungen mit CAE-Methoden*. STEINBUCH, R. ; SCHMIDT, L. (Erfinder und Patentinhaber). Aktenzeichenn: 101 37 364.3, Anmeldetag: 01.08.2001, Offenlegungstag: 05.06.2003, Veröffentlichungstag der Patentanmeldung: 09.02.2006,

[VDA 2009a]

VDA-Empfehlung VDA 301 (November 2009). *Eigenfrequenzmessung und Modal-Analyse von Brems scheiben in der Entwicklung*. Verband der Automobilindustrie e. V. (VDA), Frankfurt. (Dokument abrufbar über <http://www.vda.de>)

[VDA 2009b]

VDA-Empfehlung VDA 302 (November 2009). *Eigenfrequenzmessung und Modal-Analyse von Brems scheiben in der Serienproduktion*. Verband der Automobilindustrie e. V. (VDA), Frankfurt. (Dokument abrufbar über <http://www.vda.de>)

Anhang

A.1 Nenngeometrie und Nennmaterial der Pleuelstange

In einigen der weiteren Unterkapitel des Anhangs werden Zusammenhänge gezeigt, die sich auf die im Hauptteil dieser Arbeit betrachtete Pleuelstange beziehen. Daher sind im Folgenden aus Gründen der Übersichtlichkeit die Nennmaße sowie die Nennmaterialeigenschaften der Pleuelstange zusammengefasst (vgl. Kapitel 5.1).

Abbildung A.1 zeigt die Nennmaße ($\mu_{D1}, \mu_{D2}, \mu_{D3}, \mu_{D4}, \mu_{H1}, \mu_{H2}, \mu_L, \mu_B$) der Pleuelstange bzgl. ihrer acht Geometrieparameter ($d_1, d_2, d_3, d_4, h_1, h_2, l, b$). Als Werkstoff ist ein Stahl mit folgenden homogen-isotropen Nennmaterialeigenschaften angenommen:

- Dichte: $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$
- Elastizitätsmodul: $E = 210 \text{ GPa}$
- Poissonzahl: $\nu = 0,3$

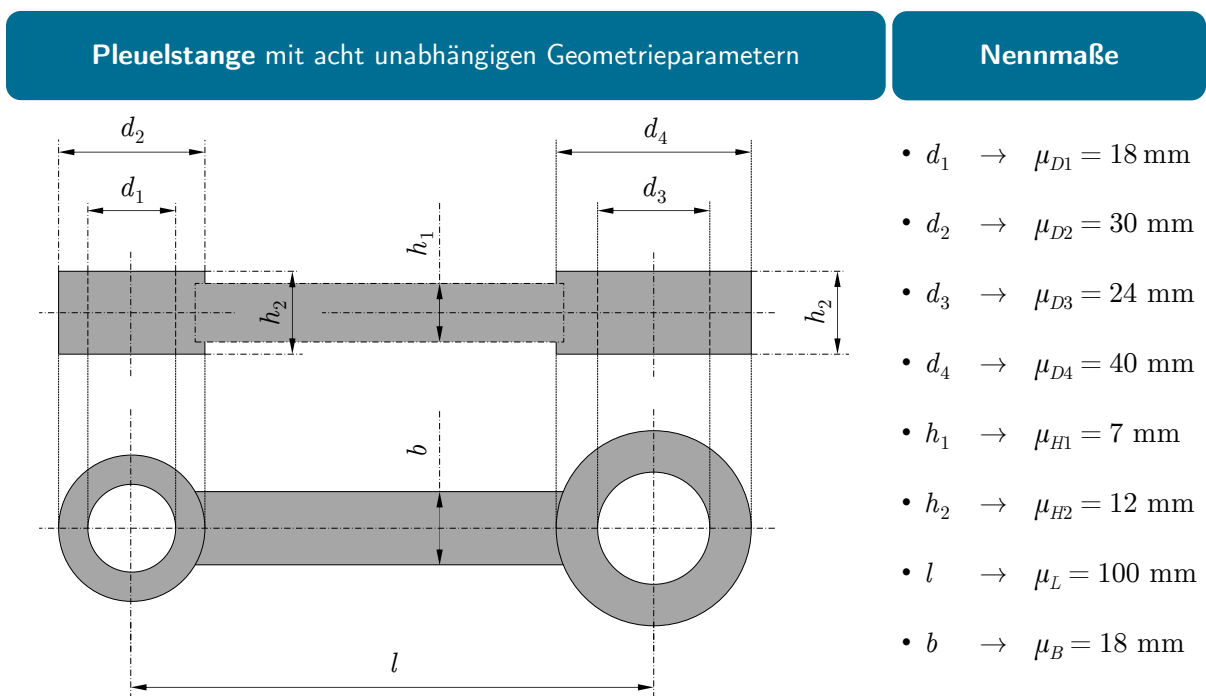


Abbildung A.1: Schematische Darstellung der Pleuelstange mit ihren Nennmaßen bzgl. der acht Geometrieparameter ($d_1, d_2, d_3, d_4, h_1, h_2, l, b$)

A.2 Eigenfrequenzen und Variationen

A.2.1 Analytische Betrachtung

Im Folgenden wird anhand von analytischen Formeln der Einfluss von Geometrie- und Materialvariationen auf die Eigenfrequenzen eines Körpers analysiert. Gegenstand der Betrachtungen sind Formeln zur Berechnung der Eigenfrequenzen eines zylindrischen, dünnen Stabes mit homogen-isotropen Materialeigenschaften. Der Stab wurde ausgewählt, da für ihn übersichtliche Formeln zur Berechnung der Eigenfrequenzen zu drei fundamental verschiedenen Modenformen existieren.

Zur Berechnung der Eigenfrequenzen von geometrisch einfachen Körpern (z. B. Stäbe, Rohre, Platten) existieren verschiedene analytische Formeln unterschiedlicher Ansätze. In [Martinček 1963] sind analytische Formeln zur Berechnung der Eigenfrequenzen eines kreiszylindrischen, dünnen Stabes aus einem homogen-isotropen Material angegeben. Dort finden sich Formeln zur Ermittlung der Frequenzen von Longitudinalschwingungen (f_j^L), Torsionsschwingungen (f_j^T) und Biegeschwingungen (f_j^B). Die entsprechenden Formeln sind (nach einigen Umformungen) in Gl. (A.1a), Gl. (A.1b) und Gl. (A.1c) gezeigt.

$$f_j^L = \frac{j}{2 \cdot l} \cdot \sqrt{\frac{E}{\rho}} \cdot K_L \quad \text{mit } K_L = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{\nu^2 \cdot \pi^2 \cdot j^2 \cdot d^2}{8 \cdot l^2}}} \quad (\text{A.1a})$$

$$f_j^B = \frac{S_j^2 \cdot d}{8 \cdot \pi \cdot l^2} \cdot \sqrt{\frac{E}{\rho}} \cdot K_B \quad \text{mit } K_B = f(S_j, d, l, \nu) \quad (\text{A.1b})$$

$$f_j^T = \frac{j}{2 \cdot l} \cdot \sqrt{\frac{E}{2 \cdot (1 + \nu) \cdot \rho}} \cdot K_T \quad \text{mit } K_T = \frac{1}{\sqrt{1,183}} \quad (\text{A.1c})$$

Dabei ist j (mit $j = 1, 2, \dots$) die Ordnungszahl der jeweiligen Eigenmode, l die Länge und d der Durchmesser des Stabes, ρ die Dichte, E der Elastizitätsmodul und ν die Poissonzahl des Materials, π die Kreiszahl und S_j die normierte Wellenzahl (siehe z. B. [Gonçalves 2007]) der j -ten Biegeschwingung. Die Variablen K_L , K_B und K_T sind Korrekturfaktoren; der Korrekturfaktor K_B für die Biegeeigenfrequenzen ist aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht im Detail angegeben.

Im Folgenden wird anhand von Gl. (A.1a) bis Gl. (A.1c) separat analysiert, inwiefern die Eigenfrequenzen nominell gleicher Teile infolge von Unterschieden hinsichtlich des Elastizitätsmoduls oder der Dichte, einem Unterschied hinsichtlich der Poissonzahl bzw.

Unterschieden hinsichtlich der geometrischen Abmessungen variieren. Dabei wird jeweils von dem theoretischen Fall ausgegangen, dass die weiteren Einflussgrößen für alle Teile konstant sind.

- Anhand von Gl. (A.1a) bis Gl. (A.1c) ist ersichtlich, dass die Dichte ρ sowie der Elastizitätsmodul E jeweils für alle drei betrachteten Schwingungsarten eines zylindrischen Stabes gleichermaßen und unabhängig von der Ordnungszahl j in die Eigenfrequenzen eingehen. Variationen der Dichte oder des Elastizitätsmoduls bedingen demzufolge Änderungen aller Eigenfrequenzen um einen identischen Faktor. Alle Eigenfrequenzen werden also um denselben Prozentwert verschoben. Da die Eigenfrequenzen umgekehrt proportional von der Wurzel der Dichte bzw. proportional von der Wurzel des Elastizitätsmoduls abhängen, sind die prozentualen Eigenfrequenzverschiebungen infolge einer Änderung von Dichte oder Elastizitätsmodul geringer als die prozentuale Variation des jeweiligen Materialkennwerts selbst.
- Anhand von Gl. (A.1c) ist zu sehen, dass alle Torsionsmoden auf Grund einer abweichenden Poissonzahl ν um denselben Faktor geändert werden. Die Verhältnisse zwischen den entsprechenden Frequenzen bleiben also stets konstant. Eine bestimmte Variation der Poissonzahl wirkt sich verhältnismäßig gering auf die Eigenfrequenzen selbst aus, u. a. da die Poissonzahl in allen Formeln unter einer Wurzel steht. Sowohl Gl. (A.1a) als auch Gl. (A.1b) zeigen, dass die Poissonzahl zur Berechnung der Frequenzen von Longitudinal- und Biegeeigenmoden in den Korrekturfaktor K_L und K_B berücksichtigt wird. Wie stark sich eine Variation der Poissonzahl auf solche Eigenfrequenzen auswirkt, hängt von der Ordnungszahl j ab. Die Frequenzen hängen jedoch bei näherer Betrachtung des jeweiligen Korrekturfaktors vor allem für niedrige Ordnungszahlen und große Verhältnisse von Länge zu Durchmesser nur geringfügig von der Poissonzahl ab.
- Anhand von Gl. (A.1a) und Gl. (A.1c) ist ersichtlich, dass die entsprechenden Eigenfrequenzen umgekehrt proportional von der Länge l abhängen. Gl. (A.1b) zeigt einen linearen Zusammenhang zwischen dem Durchmesser d bzw. einen umgekehrt proportionalen Zusammenhang zwischen dem Quadrat der Länge l und den Eigenfrequenzen. Es bestehen je nach Geometrieparameter also unterschiedliche funktionale Zusammenhänge zu den Eigenfrequenzen; Variationen der Länge und des Durchmessers können deutliche Änderungen der Eigenfrequenzen bedingen. Darüber hinaus sind sowohl die Länge als auch der Durchmesser in den Korrekturfaktoren K_L und

K_B von Gl. (A.1a) und Gl. (A.1b) berücksichtigt. Der Einfluss einer Längen- bzw. Durchmesservariation hängt damit von der Ordnungszahl j ab.

A.2.2 Eigenfrequenzen und Variationen (numerisch)

Im Folgenden sind Ergebnisse numerischer Eigenfrequenzberechnungen mit *COMSOL Multiphysics* zum Einfluss von Geometrie- und Materialvariationen auf die Eigenfrequenzen eines Körpers gezeigt. Gegenstand der Ausführungen ist die im Hauptteil dieser Arbeit betrachtete Pleuelstange, deren Nenngeometrie und Nennmaterialeigenschaften in Anhang A.1 zusammengefasst sind. Die Berechnungen erfolgen mit den in Kapitel 5.3.1 angegebenen Softwareeinstellungen.

Im ersten Schritt werden die ersten $m = 17$ Eigenfrequenzen der Pleuelstange unter Berücksichtigung ihrer Nennmaße und ihrer Nennmaterialeigenschaften numerisch bestimmt. Diese Eigenfrequenzen dienen als Referenz; die entsprechende Berechnung wird im Folgenden daher als *Referenzberechnung* bezeichnet. Im zweiten Schritt werden sechs analoge Eigenfrequenzberechnungen unter Variation der Materialeigenschaften bzw. der geometrischen Abmessungen durchgeführt. Die von der jeweiligen Variation abhängigen Änderungen der Eigenfrequenzen werden ermittelt und prozentual angegeben.

Dabei werden zunächst unter Berücksichtigung der Nennmaße drei Eigenfrequenzberechnungen durchgeführt, bei denen jeweils genau einer der Materialkennwerte variiert wird (die beiden weiteren Kennwerte bleiben unverändert). Konkret werden dazu nacheinander die Dichte ρ (Variation 1: $\rho = 7457,5 \text{ kg/m}^3$ anstatt $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$), der Elastizitätsmodul E (Variation 2: $E = 199,5 \text{ GPa}$ anstatt $E = 210 \text{ GPa}$) sowie die Poissonzahl ν (Variation 3: $\nu = 0,285$ anstatt $\nu = 0,3$) um 5% reduziert. Die für die entsprechenden drei Berechnungen genutzten Materialkennwerte sind in Tabelle A.1 zusammengefasst.

Tabelle A.1: Auflistung der bei den Eigenfrequenzberechnungen zum Einfluss von Materialvariationen genutzten Materialkennwerte. Gegenüber der Referenzberechnung (Berücksichtigung der Nennmaterialkennwerte und der Nennmaße) werden nacheinander bei drei weiteren Berechnungen zunächst die Dichte ρ (Variation 1), dann der Elastizitätsmodul E (Variation 2) und schließlich die Poissonzahl ν (Variation 3) um 5% reduziert. Die Dichte ρ ist in kg/m^3 und der Elastizitätsmodul E in GPa angegeben, die Poissonzahl ν ist dimensionslos.

Materialkennwert	Nennwert	Variation 1	Variation 2	Variation 3
ρ	7850	7457,5	7850	7850
E	210	210	199,5	210
ν	0,3	0,3	0,3	0,285

Analog dazu werden unter Berücksichtigung der Nennmaterialkennwerte drei Eigenfrequenzberechnungen durchgeführt, bei denen jeweils die Abmessungen bzgl. aller acht voneinander unabhängigen Geometrieparameter zufällig gewählt werden (Variation 4, Variation 5, Variation 6). Zur Ermittlung zufälliger Abmessungen dienen die in Kapitel 5.1 gezeigten normalverteilten Zufallsgrößen. Die für die entsprechenden drei Berechnungen genutzten Abmessungen sind in Tabelle A.2 zusammengefasst.

Tabelle A.2: Auflistung der bei den Eigenfrequenzberechnungen zum Einfluss von Geometrievariationen genutzten Abmessungen bzgl. der acht Geometrieparameter ($d_1, d_2, d_3, d_4, h_1, h_2, l, b$). Gegenüber der Referenzberechnung (Berücksichtigung der Nennmaterialkennwerte und der Nennmaße) werden nacheinander bei drei weiteren Berechnungen zufallsbehaftete Abmessungen der Pleuelstange berücksichtigt. Alle Werte sind in der Einheit mm angegeben.

Geometrieparameter	Nennmaß	Variation 4	Variation 5	Variation 6
d_1	18	17,949	18,026	18,537
d_2	30	29,596	30,137	30,190
d_3	24	23,750	24,077	23,893
d_4	40	39,768	40,062	40,189
h_1	7	7,237	7,131	6,830
h_2	12	12,091	12,139	12,042
l	100	100,293	100,121	99,727
b	18	18,049	17,498	18,119

In Abbildung A.2 sind die prozentualen Verschiebungen der unter Berücksichtigung der Variationen (Variation 1 bis Variation 6, siehe Tabelle A.1 und Tabelle A.2) ermittelten Eigenfrequenzen bezogen auf die entsprechenden Eigenfrequenzen aus der Referenzberechnung dargestellt.

Es ist erkennbar, dass eine Variation der Dichte ρ bzw. des Elastizitätsmoduls E zu identischen prozentualen Verschiebungen aller Eigenfrequenzen führt. Außerdem sind die prozentualen Eigenfrequenzverschiebungen geringer als die prozentuale Variation des jeweiligen Materialkennwerts selbst. Durch eine Variation der Dichte ρ bzw. des Elastizitätsmoduls E um -5% ändert sich jede Eigenfrequenz um lediglich ca. $2,6\%$ bzw. ca. $-2,5\%$ (siehe Abbildung A.2 a und Abbildung A.2 b). Eine Variation der Poissonzahl ν führt zu unterschiedlichen relativen Frequenzverschiebungen. Diese sind jedoch verglichen mit der Variation des Materialkennwerts selbst sehr gering. Durch eine Variation der Poissonzahl ν um -5% ändern sich die Eigenfrequenzen um max. ca. $0,5\%$ (siehe Abbildung A.2 c). Abweichende geometrische Abmessungen können zu unterschiedlichen

Eigenfrequenzverschiebungen von mehreren Prozent führen. Außerdem ergibt sich für jede Kombination von geringfügig unterschiedlichen Abmessungen ein charakteristisches Muster der Frequenzverschiebungen (siehe Abbildung A.2 d bis Abbildung A.2 f).

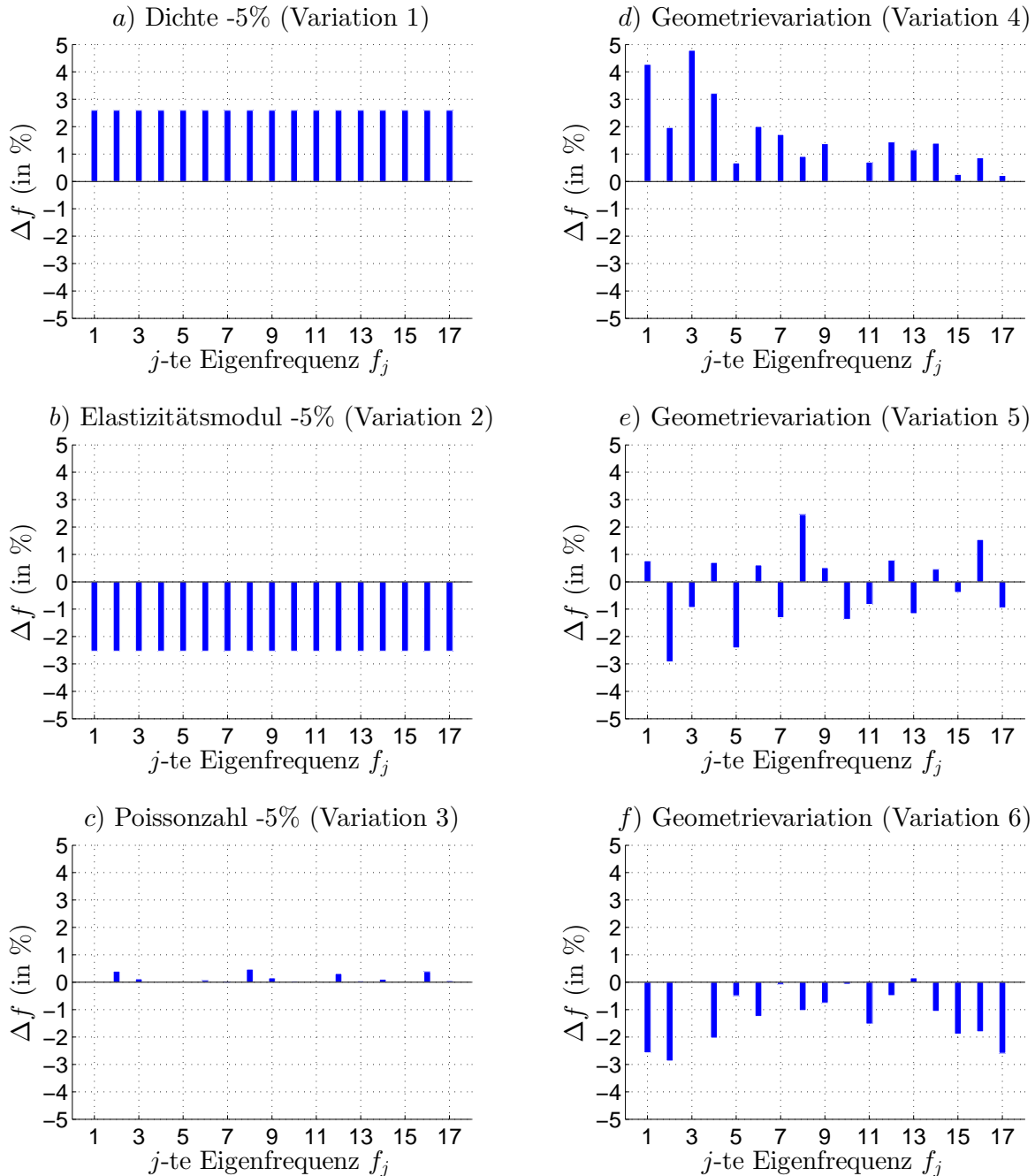


Abbildung A.2: Darstellung der prozentualen Verschiebungen der j -ten Eigenfrequenz (mit $j = 1, \dots, 17$) der Pleuelstange infolge von Material- bzw. Geometrievariationen bezogen auf die entsprechende Eigenfrequenz aus der Referenzberechnung. Gezeigt sind die Eigenfrequenzverschiebungen infolge a) einer Variation der Dichte ρ um -5% (Variation 1), b) einer Variation des Elastizitätsmoduls E um -5% (Variation 2), c) einer Variation der Poissonzahl ν um -5% (Variation 3), d-f) unterschiedlicher zufälliger Variationen der Abmessungen bzgl. aller acht Geometrieparameter ($d_1, d_2, d_3, d_4, h_1, h_2, l, b$) (Variation 4 bis Variation 6).

A.3 Eigenfrequenzen und Eigenmoden

Im Folgenden wird auf numerisch mit *COMSOL Multiphysics* ermittelte Eigenmoden und Eigenfrequenzen der im Hauptteil betrachteten Pleuelstange unter Berücksichtigung ihrer Nennmaße und ihrer Nennmaterialeigenschaften eingegangen. Außerdem sind die Wertebereiche der Eigenfrequenzen in Abhängigkeit von Geometrievariationen gezeigt.

Die Pleuelstange ist mit ihren Nennmaßen in Abbildung 5.1 bzw. Abbildung A.1 gezeigt; die Nennmaterialeigenschaften sind in Kapitel 5.1 bzw. Kapitel A.1 aufgelistet. In Kapitel A.3.1 sind die ersten $m = 17$ Eigenfrequenzen der Pleuelstange unter Berücksichtigung ihrer Nennmaße und ihrer Nennmaterialeigenschaften tabellarisch aufgelistet und die zugehörigen Eigenmoden aus verschiedenen Perspektiven gezeigt. In Kapitel A.3.2 sind zunächst Kennwerte zur Charakterisierung der tatsächlichen Abmessungen der $n = 800$ im Hauptteil betrachteten virtuellen Teile in einer Tabelle angegeben. Anschließend werden die Wertebereiche der ersten $m = 17$ Eigenfrequenzen aller $n = 800$ Teile in Abhängigkeit der Geometrievariationen tabellarisch charakterisiert. Alle gezeigten Daten und Abbildungen basieren auf numerischen Eigenfrequenzberechnungen.

A.3.1 Eigenfrequenzen und Eigenmoden der Pleuelstange mit Nenngeometrie und Nennmaterialeigenschaften

In Tabelle A.3 sind die ersten $m = 17$ numerisch mit *COMSOL Multiphysics* bestimmten Eigenfrequenzen f_1, \dots, f_{17} der Pleuelstange unter Berücksichtigung ihrer Nennmaße und ihrer Nennmaterialeigenschaften in der Einheit kHz aufgelistet. Abbildung A.3 bis Abbildung A.19 zeigen die entsprechenden Eigenmoden der Pleuelstange aus drei Perspektiven (Seitenansicht, Draufsicht, 3D-Ansicht).

Tabelle A.3: Auflistung der ersten $m = 17$ numerisch mit *COMSOL Multiphysics* bestimmten Eigenfrequenzen f_1, \dots, f_{17} einer Pleuelstange mit Nennmaßen und Nennmaterialeigenschaften in der Einheit kHz

Variable	Frequenz	Variable	Frequenz	Variable	Frequenz
f_1	1,7853	f_7	12,1275	f_{13}	21,4672
f_2	3,7288	f_8	14,1884	f_{14}	22,7802
f_3	3,7447	f_9	16,8021	f_{15}	26,8632
f_4	5,1673	f_{10}	17,2743	f_{16}	27,4087
f_5	9,0248	f_{11}	19,0068	f_{17}	28,7952
f_6	10,4465	f_{12}	20,7812		

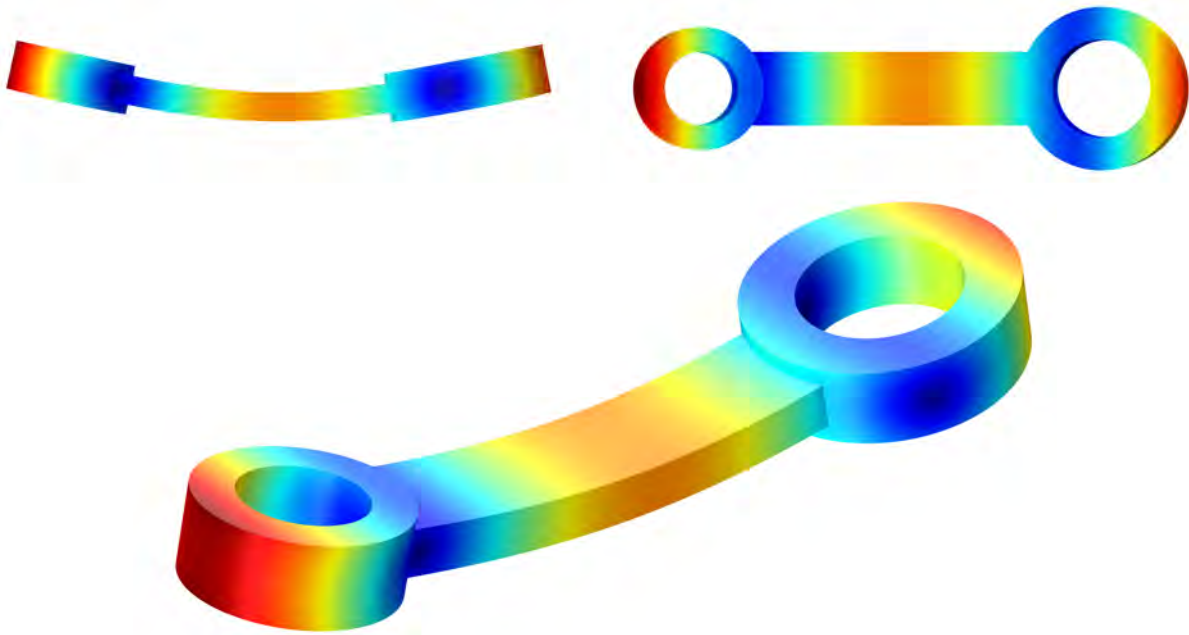


Abbildung A.3: Darstellung der 1. Eigenmode ($f_1 = 1,7853 \text{ kHz}$) einer Pleuelstange mit Nennmaßen und Nennmaterialeigenschaften (oben links: Seitenansicht, oben rechts: Draufsicht, unten: 3D-Ansicht). Dargestellt ist die Gesamtauslenkung in den Farben einer Regenbogenskala (rot: große Auslenkung, blau: kleine Auslenkung).

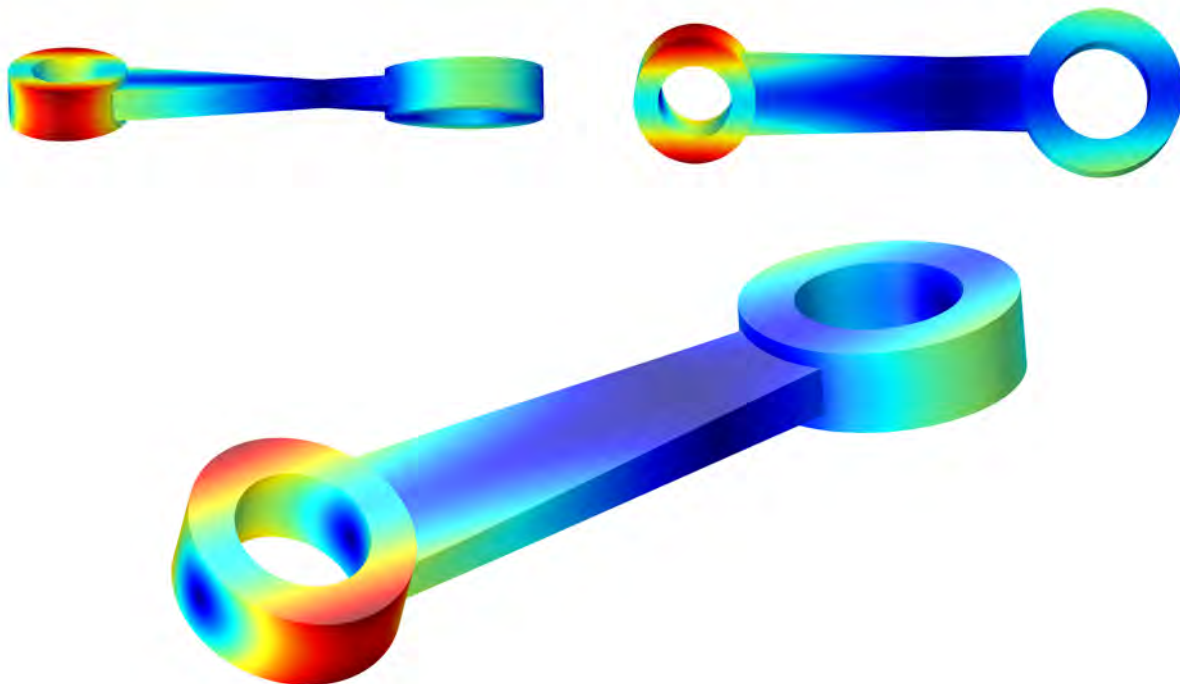


Abbildung A.4: Darstellung der 2. Eigenmode ($f_2 = 3,7288 \text{ kHz}$) einer Pleuelstange mit Nennmaßen und Nennmaterialeigenschaften (oben links: Seitenansicht, oben rechts: Draufsicht, unten: 3D-Ansicht). Dargestellt ist die Gesamtauslenkung in den Farben einer Regenbogenskala (rot: große Auslenkung, blau: kleine Auslenkung).

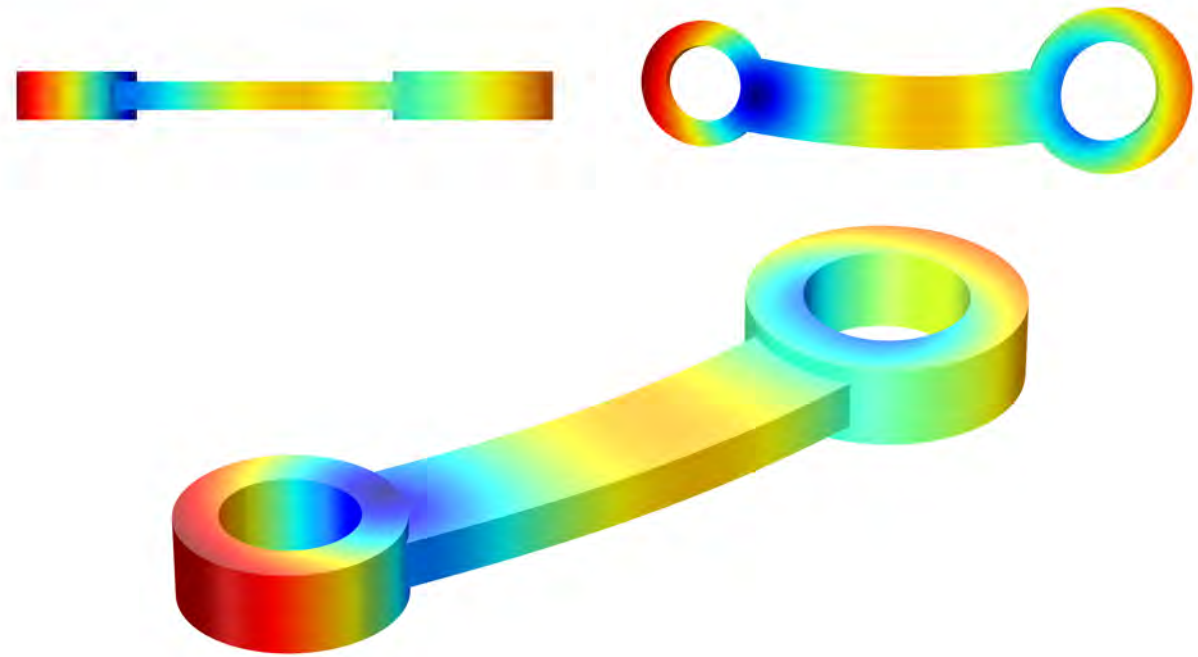


Abbildung A.5: Darstellung der 3. Eigenmode ($f_3 = 3,7447$ kHz) einer Pleuelstange mit Nennmaßen und Nennmaterialeigenschaften (oben links: Seitenansicht, oben rechts: Draufsicht, unten: 3D-Ansicht). Dargestellt ist die Gesamtauslenkung in den Farben einer Regenbogenskala (rot: große Auslenkung, blau: kleine Auslenkung).

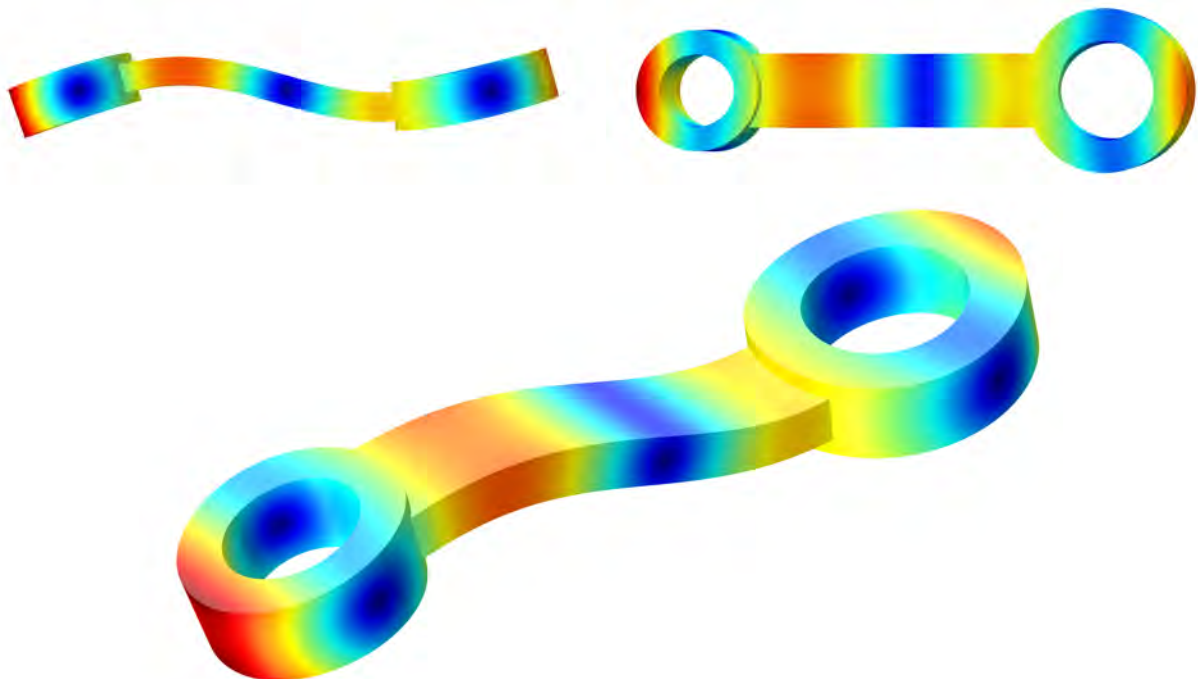


Abbildung A.6: Darstellung der 4. Eigenmode ($f_4 = 5,1673$ kHz) einer Pleuelstange mit Nennmaßen und Nennmaterialeigenschaften (oben links: Seitenansicht, oben rechts: Draufsicht, unten: 3D-Ansicht). Dargestellt ist die Gesamtauslenkung in den Farben einer Regenbogenskala (rot: große Auslenkung, blau: kleine Auslenkung).

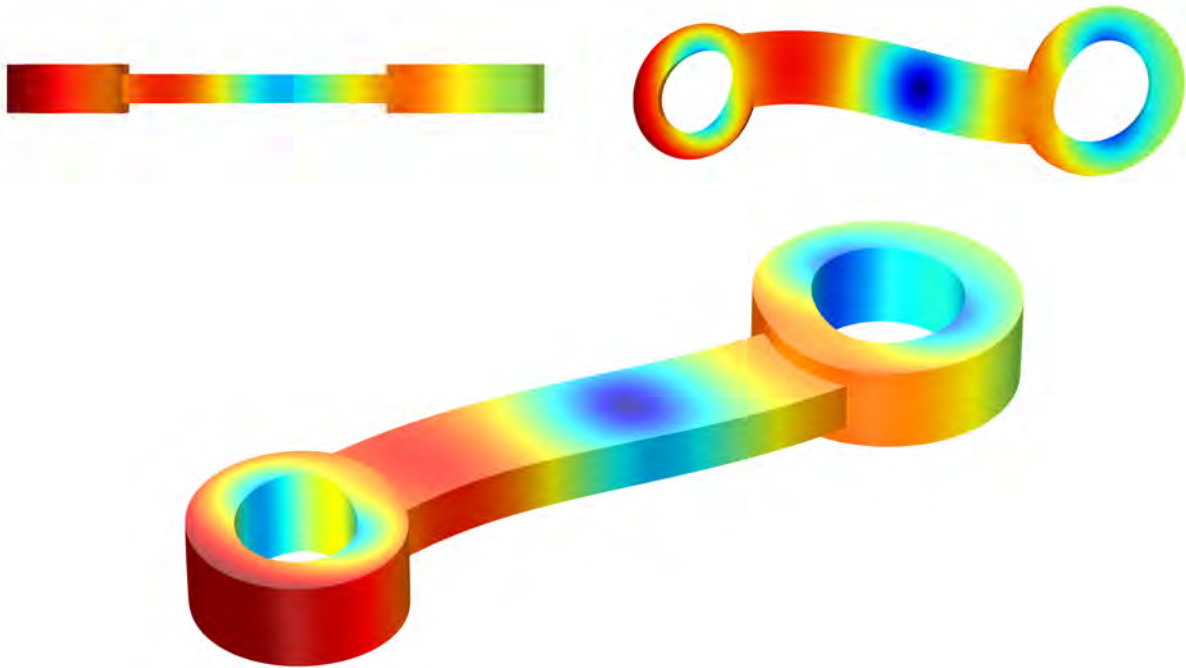


Abbildung A.7: Darstellung der 5. Eigenmode ($f_5 = 9,0248$ kHz) einer Pleuelstange mit Nennmaßen und Nennmaterialeigenschaften (oben links: Seitenansicht, oben rechts: Draufsicht, unten: 3D-Ansicht). Dargestellt ist die Gesamtauslenkung in den Farben einer Regenbogenskala (rot: große Auslenkung, blau: kleine Auslenkung).

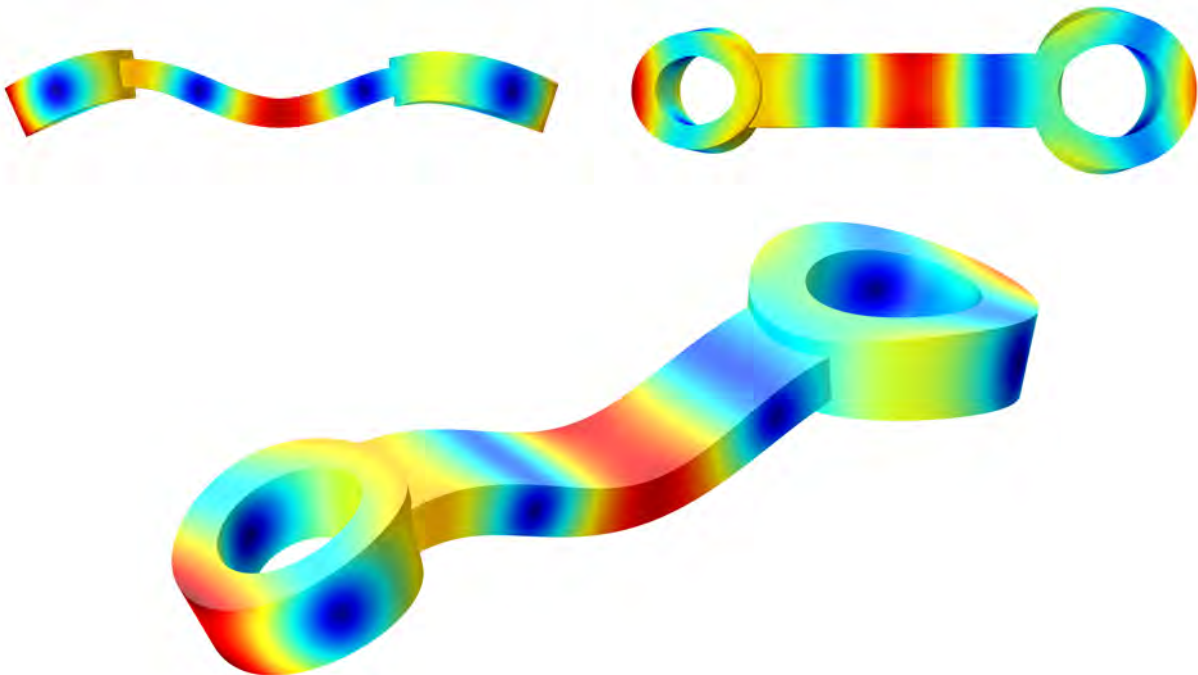


Abbildung A.8: Darstellung der 6. Eigenmode ($f_6 = 10,4465$ kHz) einer Pleuelstange mit Nennmaßen und Nennmaterialeigenschaften (oben links: Seitenansicht, oben rechts: Draufsicht, unten: 3D-Ansicht). Dargestellt ist die Gesamtauslenkung in den Farben einer Regenbogenskala (rot: große Auslenkung, blau: kleine Auslenkung).

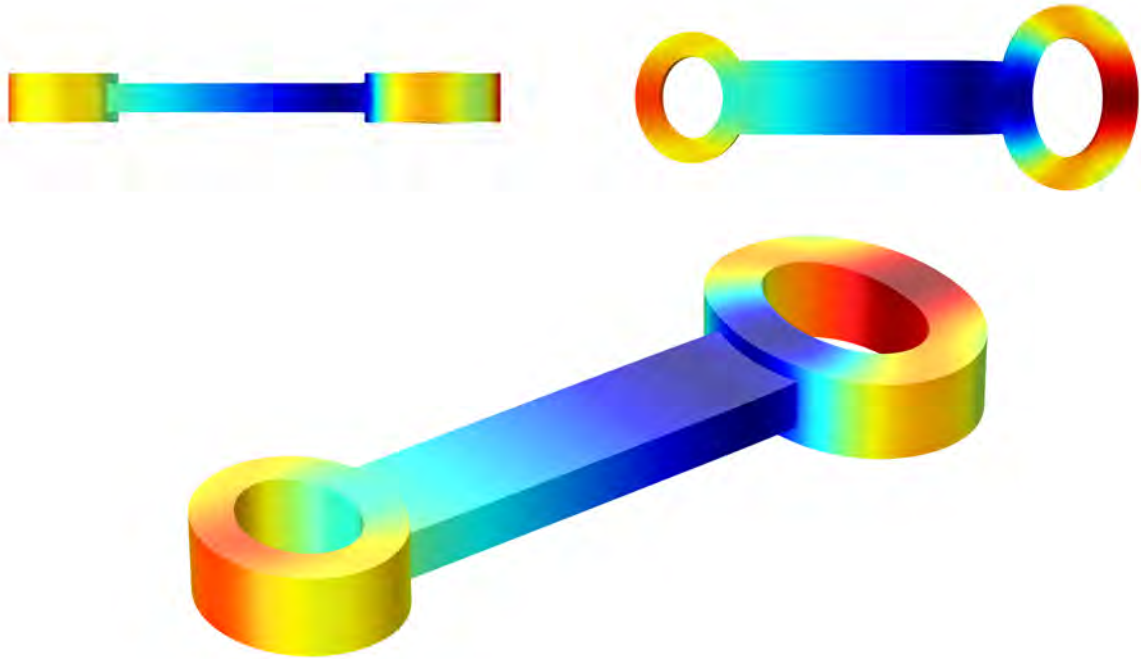


Abbildung A.9: Darstellung der 7. Eigenmode ($f_7 = 12,1275 \text{ kHz}$) einer Pleuelstange mit Nennmaßen und Nennmaterialeigenschaften (oben links: Seitenansicht, oben rechts: Draufsicht, unten: 3D-Ansicht). Dargestellt ist die Gesamtauslenkung in den Farben einer Regenbogenskala (rot: große Auslenkung, blau: kleine Auslenkung).

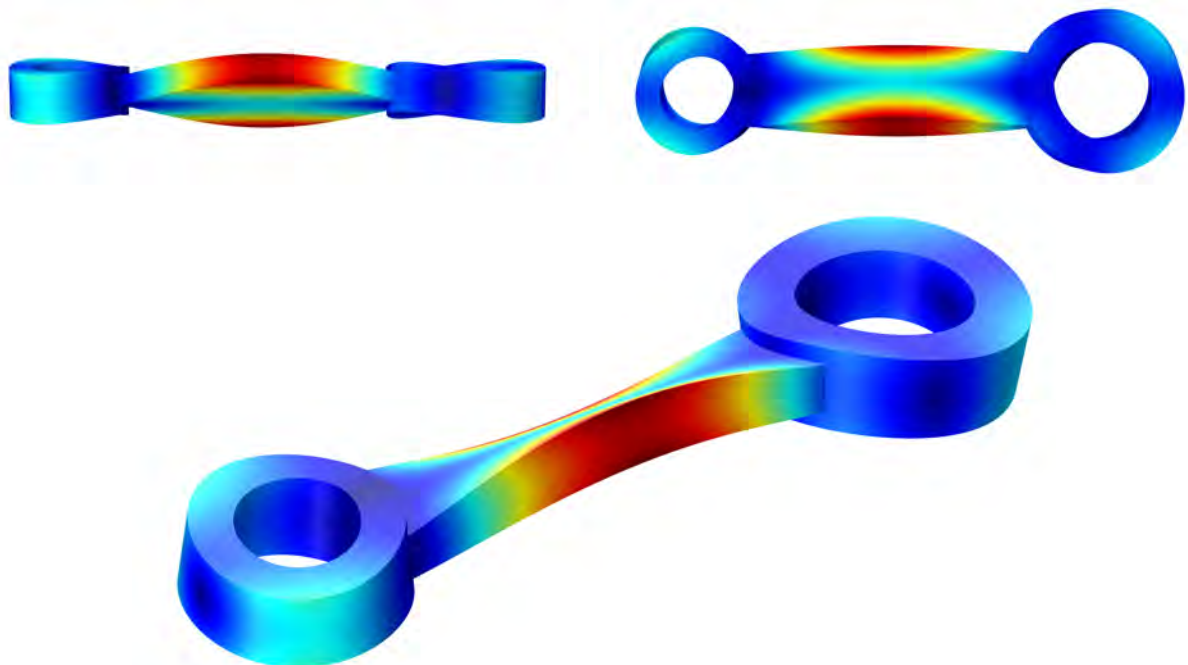


Abbildung A.10: Darstellung der 8. Eigenmode ($f_8 = 14,1884 \text{ kHz}$) einer Pleuelstange mit Nennmaßen und Nennmaterialeigenschaften (oben links: Seitenansicht, oben rechts: Draufsicht, unten: 3D-Ansicht). Dargestellt ist die Gesamtauslenkung in den Farben einer Regenbogenskala (rot: große Auslenkung, blau: kleine Auslenkung).

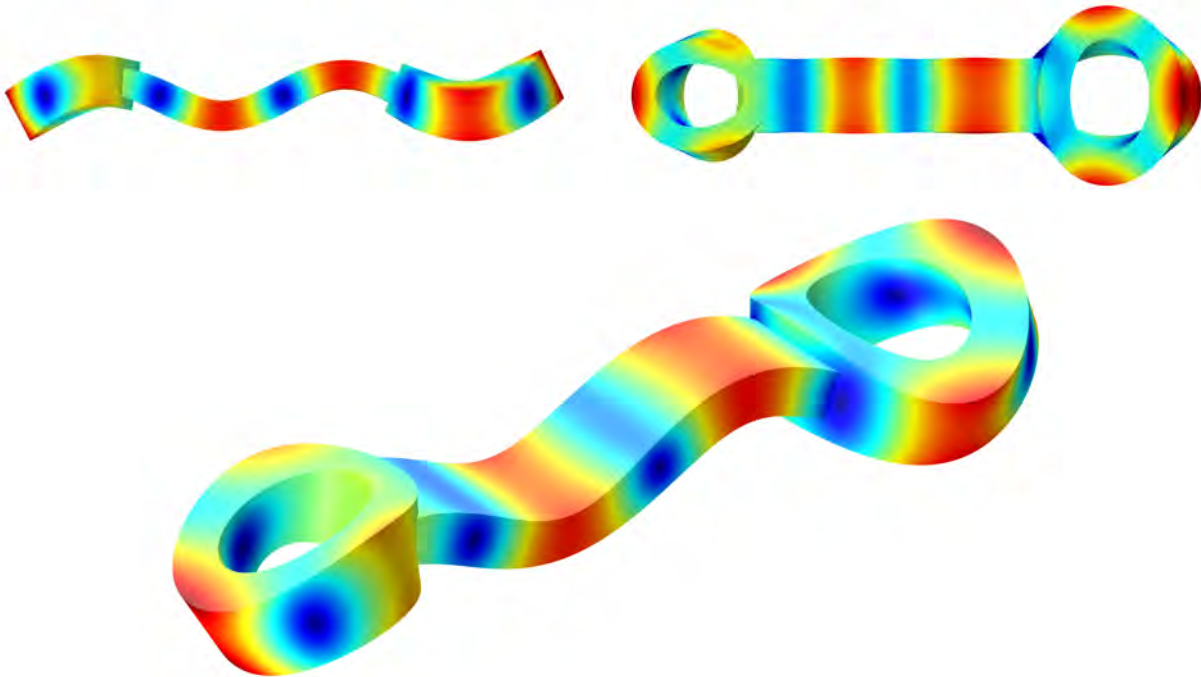


Abbildung A.11: Darstellung der 9. Eigenmode ($f_9 = 16,8021$ kHz) einer Pleuelstange mit Nennmaßen und Nennmaterialeigenschaften (oben links: Seitenansicht, oben rechts: Draufsicht, unten: 3D-Ansicht). Dargestellt ist die Gesamtauslenkung in den Farben einer Regenbogenskala (rot: große Auslenkung, blau: kleine Auslenkung).

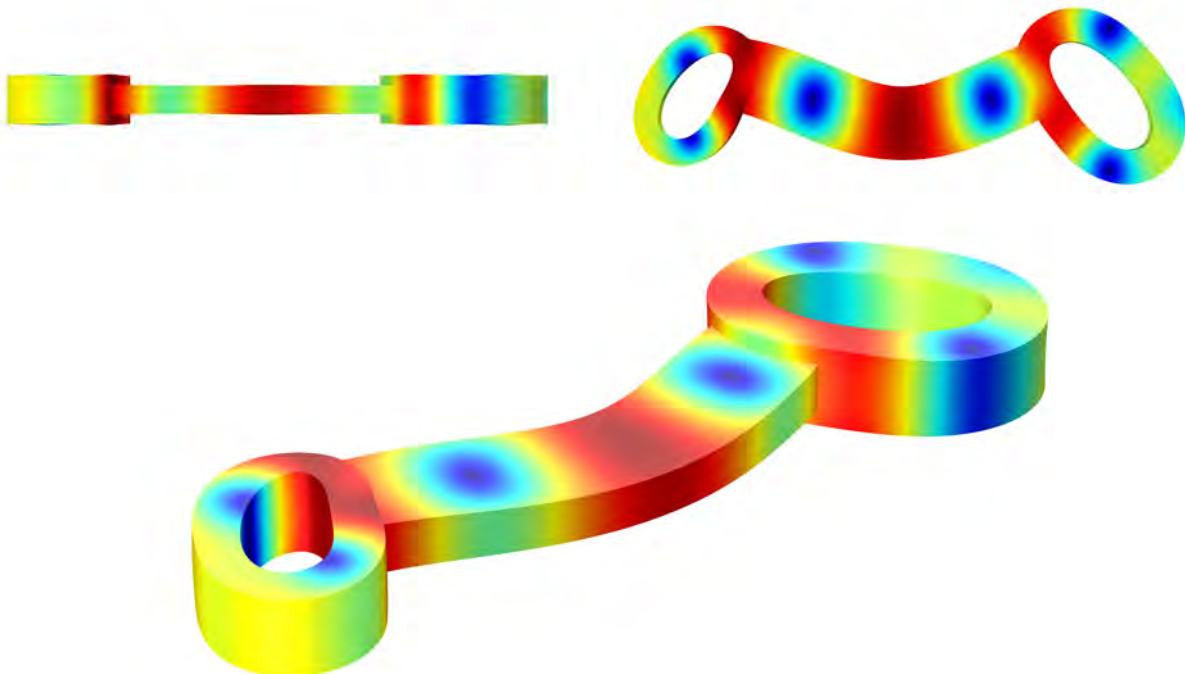


Abbildung A.12: Darstellung der 10. Eigenmode ($f_{10} = 17,2743$ kHz) einer Pleuelstange mit Nennmaßen und Nennmaterialeigenschaften (oben links: Seitenansicht, oben rechts: Draufsicht, unten: 3D-Ansicht). Dargestellt ist die Gesamtauslenkung in den Farben einer Regenbogenskala (rot: große Auslenkung, blau: kleine Auslenkung).

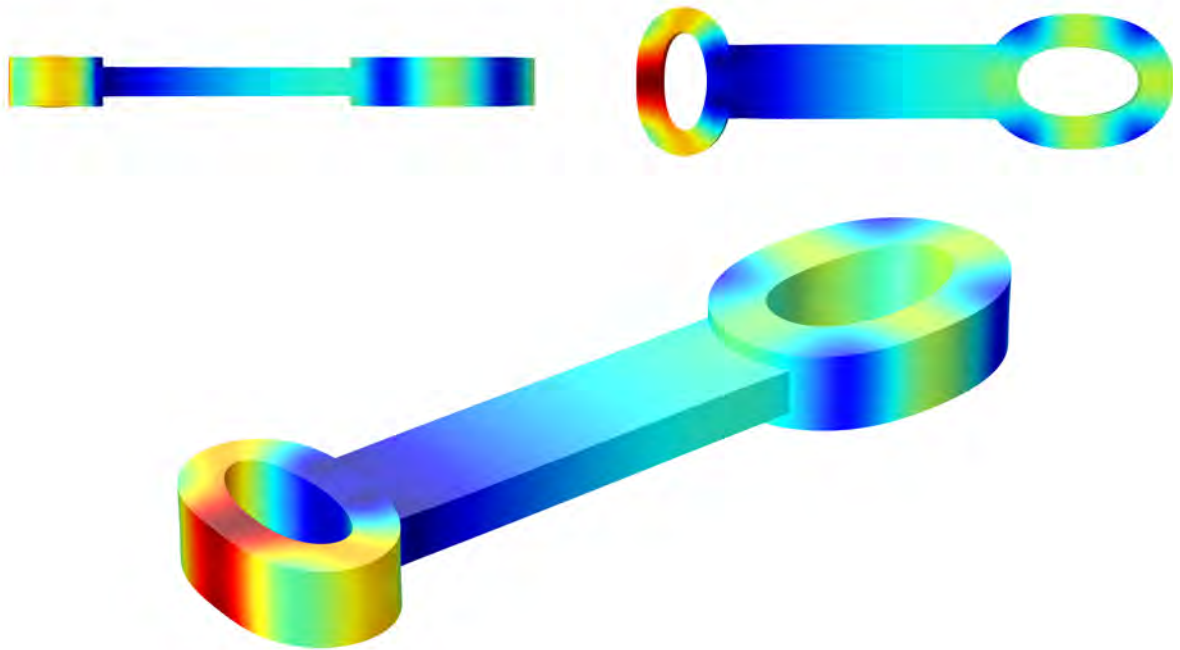


Abbildung A.13: Darstellung der 11. Eigenmode ($f_{11} = 19,0068$ kHz) einer Pleuelstange mit Nennmaßen und Nennmaterialeigenschaften (oben links: Seitenansicht, oben rechts: Draufsicht, unten: 3D-Ansicht). Dargestellt ist die Gesamtauslenkung in den Farben einer Regenbogenskala (rot: große Auslenkung, blau: kleine Auslenkung).

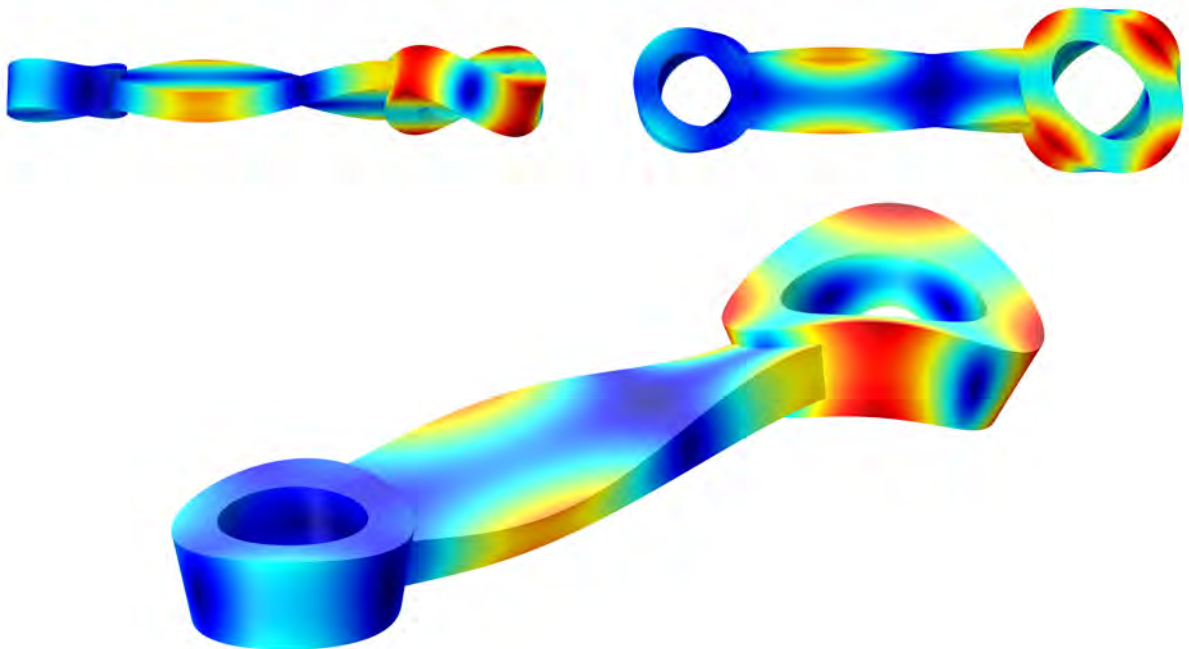


Abbildung A.14: Darstellung der 12. Eigenmode ($f_{12} = 20,7812$ kHz) einer Pleuelstange mit Nennmaßen und Nennmaterialeigenschaften (oben links: Seitenansicht, oben rechts: Draufsicht, unten: 3D-Ansicht). Dargestellt ist die Gesamtauslenkung in den Farben einer Regenbogenskala (rot: große Auslenkung, blau: kleine Auslenkung).

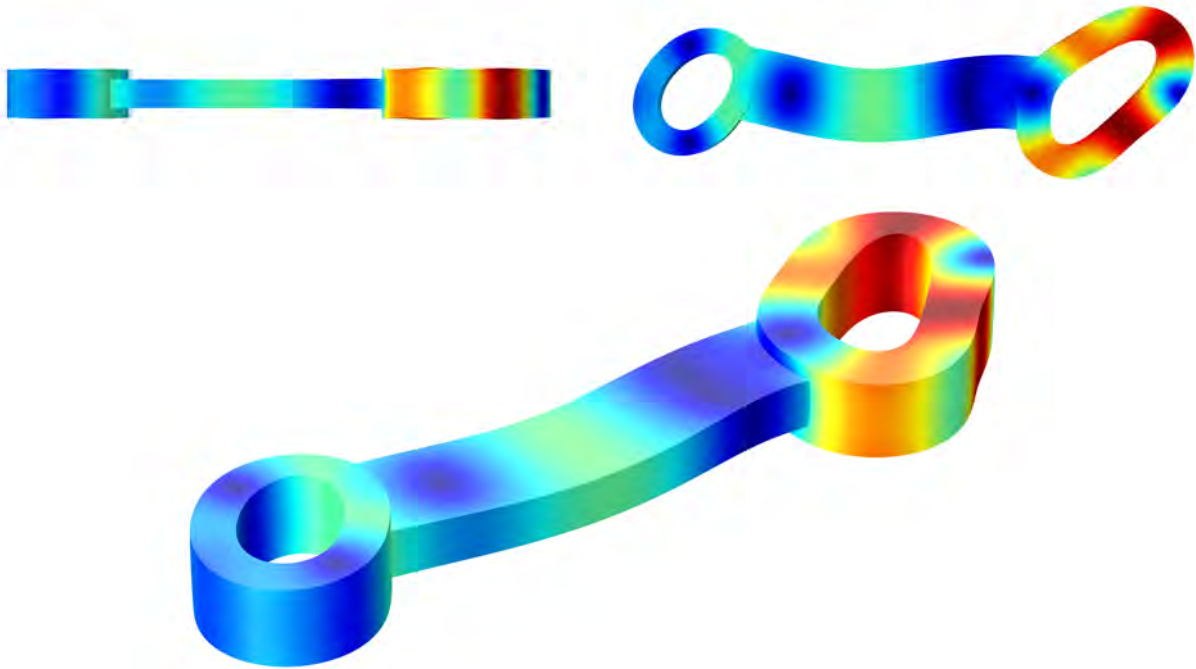


Abbildung A.15: Darstellung der 13. Eigenmode ($f_{13} = 21,4672 \text{ kHz}$) einer Pleuelstange mit Nennmaßen und Nennmaterialeigenschaften (oben links: Seitenansicht, oben rechts: Draufsicht, unten: 3D-Ansicht). Dargestellt ist die Gesamtauslenkung in den Farben einer Regenbogenskala (rot: große Auslenkung, blau: kleine Auslenkung).

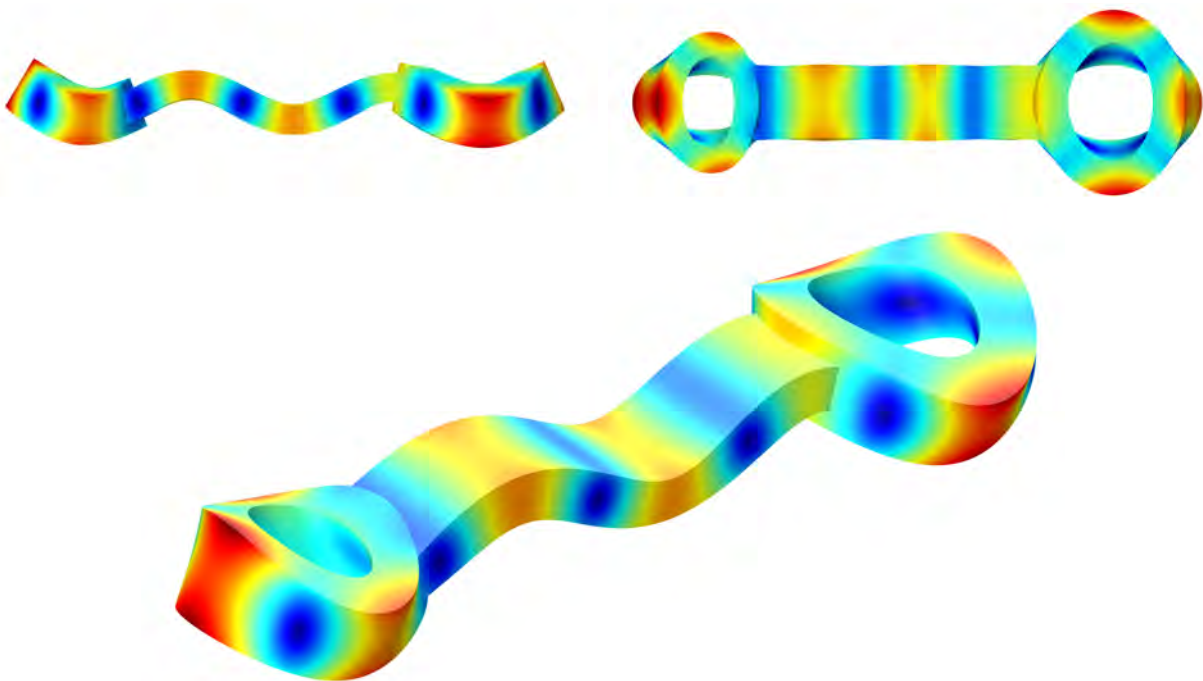


Abbildung A.16: Darstellung der 14. Eigenmode ($f_{14} = 22,7802 \text{ kHz}$) einer Pleuelstange mit Nennmaßen und Nennmaterialeigenschaften (oben links: Seitenansicht, oben rechts: Draufsicht, unten: 3D-Ansicht). Dargestellt ist die Gesamtauslenkung in den Farben einer Regenbogenskala (rot: große Auslenkung, blau: kleine Auslenkung).

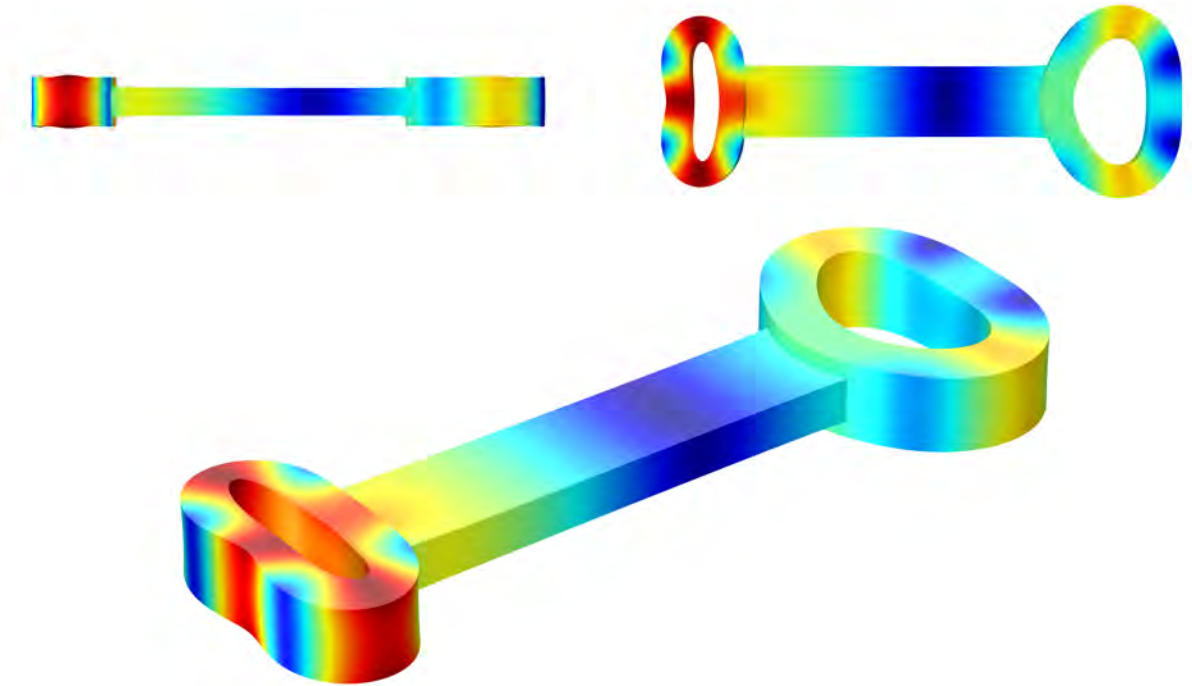


Abbildung A.17: Darstellung der 15. Eigenmode ($f_{15} = 26,8632$ kHz) einer Pleuelstange mit Nennmaßen und Nennmaterialeigenschaften (oben links: Seitenansicht, oben rechts: Draufsicht, unten: 3D-Ansicht). Dargestellt ist die Gesamtauslenkung in den Farben einer Regenbogenskala (rot: große Auslenkung, blau: kleine Auslenkung).

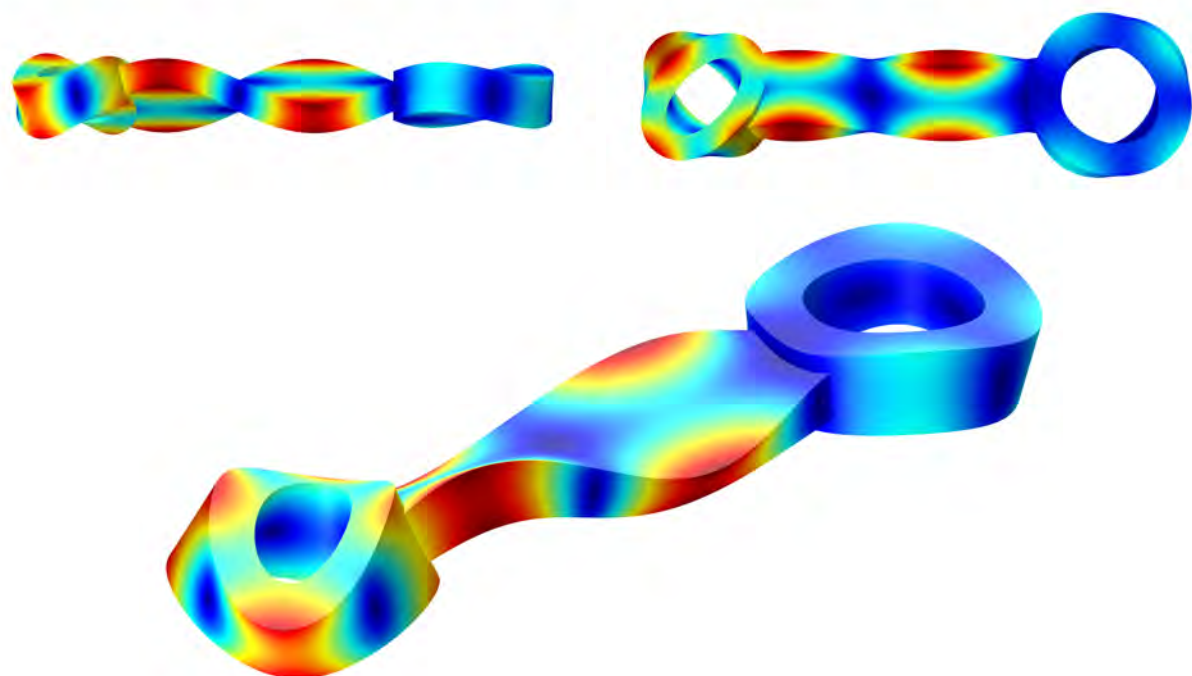


Abbildung A.18: Darstellung der 16. Eigenmode ($f_{16} = 27,4087$ kHz) einer Pleuelstange mit Nennmaßen und Nennmaterialeigenschaften (oben links: Seitenansicht, oben rechts: Draufsicht, unten: 3D-Ansicht). Dargestellt ist die Gesamtauslenkung in den Farben einer Regenbogenskala (rot: große Auslenkung, blau: kleine Auslenkung).

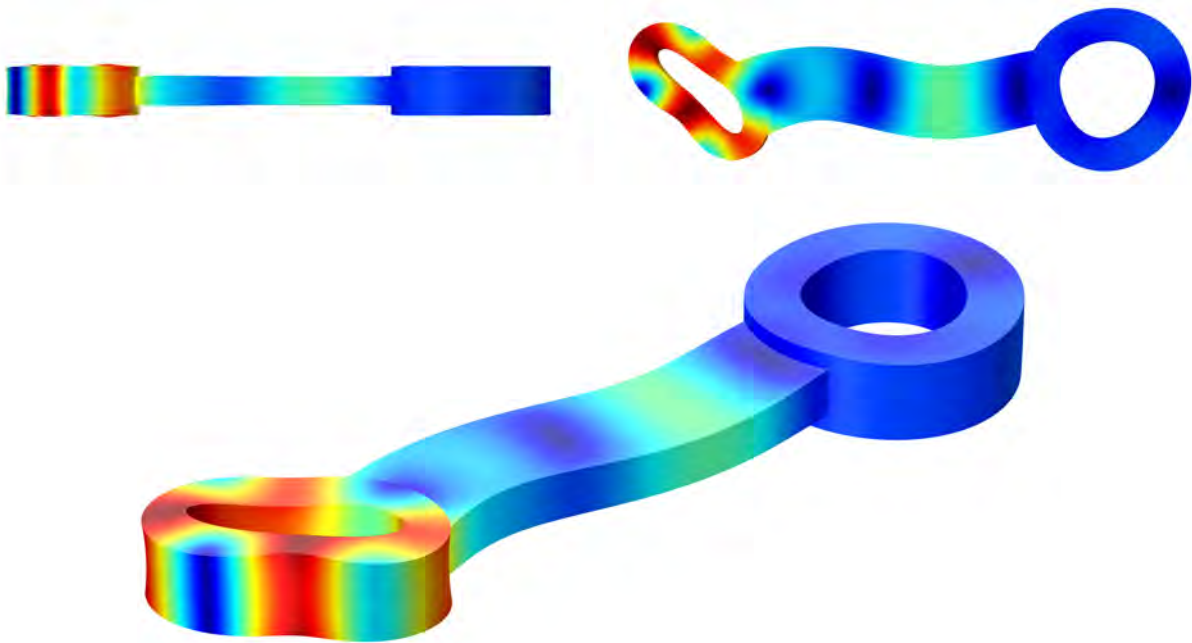


Abbildung A.19: Darstellung der 17. Eigenmode ($f_{17} = 28,7952 \text{ kHz}$) einer Pleuelstange mit Nennmaßen und Nennmaterialeigenschaften (oben links: Seitenansicht, oben rechts: Draufsicht, unten: 3D-Ansicht). Dargestellt ist die Gesamtauslenkung in den Farben einer Regenbogenskala (rot: große Auslenkung, blau: kleine Auslenkung).

A.3.2 Eigenfrequenzen der Pleuelstange in Abhängigkeit von Geometrievariationen

Die tatsächlichen Abmessungen der $n = 800$ im Hauptteil betrachteten virtuellen Pleuelstangen bzgl. aller acht Geometrieparameter wurden mit den in Kapitel 5.1 angegebenen Zufallsgrößen generiert. In Tabelle A.4 sind Kennwerte (Mittelwert, Standardabweichung, Minimum, Maximum) zur Charakterisierung der tatsächlichen Abmessungen separat für jeden Geometrieparameter ($d_1, d_2, d_3, d_4, h_1, h_2, l, b$) in der Einheit mm angegeben.

In Tabelle A.5 sind analoge Kennwerte zur Beschreibung der Wertebereiche der ersten $m = 17$ Eigenfrequenzen f_1, \dots, f_{17} unter Berücksichtigung der tatsächlichen Abmessungen der $n = 800$ Teile in der Einheit kHz aufgelistet. Dabei ist erkennbar, dass sich die Wertebereiche einiger Eigenfrequenzen unter Berücksichtigung der angenommenen Geometrievariationen überschneiden (siehe z. B. die 2. und 3. Eigenfrequenz (f_2 und f_3) oder die 9. und 10. Eigenfrequenz (f_9 und f_{10})). Daher ist nicht auszuschließen, dass sich die Reihenfolge einiger der zuvor in Kapitel A.3.1 gezeigten Eigenmoden für einige der $n = 800$ Teile geändert hat. Für verschiedene Teile müssen die nach ihren Frequenzen geordneten Eigenmoden also nicht zwangsläufig immer in derselben Reihenfolge vorliegen.

Tabelle A.4: Auflistung von Kennwerten (Mittelwert, Standardabweichung, Minimum, Maximum) zur Charakterisierung der tatsächlichen Abmessungen aller $n = 800$ im Hauptteil betrachteten virtuellen Pleuelstangen bzgl. aller acht Geometrieparameter ($d_1, d_2, d_3, d_4, h_1, h_2, l, b$). Alle Werte sind in der Einheit mm angegeben.

Geometrie- parameter	Mittelwert	Standard- abweichung	Minimum	Maximum
d_1	17,998	0,143	17,566	18,537
d_2	29,994	0,196	29,289	30,608
d_3	24,005	0,156	23,603	24,488
d_4	40,005	0,205	39,389	40,622
h_1	6,999	0,141	6,545	7,391
h_2	12,004	0,152	11,413	12,440
l	100,006	0,411	98,798	101,199
b	17,999	0,198	17,334	18,612

Tabelle A.5: Auflistung von Kennwerten (Mittelwert, Standardabweichung, Minimum, Maximum) zur Charakterisierung der Wertebereiche der ersten $m = 17$ Eigenfrequenzen f_1, \dots, f_{17} unter Berücksichtigung der tatsächlichen Abmessungen aller $n = 800$ im Hauptteil betrachteten virtuellen Pleuelstangen. Alle Werte sind in der Einheit kHz angegeben.

Eigen- frequenz	Mittelwert	Standard- abweichung	Minimum	Maximum
f_1	1,7850	0,0445	1,6551	1,9142
f_2	3,7063	0,0750	3,4574	3,9142
f_3	3,7654	0,0672	3,5613	4,0023
f_4	5,1653	0,1014	4,8666	5,4671
f_5	9,0213	0,1003	8,7353	9,3611
f_6	10,4423	0,1438	9,9987	10,8923
f_7	12,1224	0,1055	11,8190	12,4202
f_8	14,1855	0,1547	13,7388	14,6294
f_9	16,7978	0,1614	16,3067	17,2972
f_{10}	17,2669	0,1558	16,8019	17,7818
f_{11}	19,0031	0,1552	18,4623	19,4708
f_{12}	20,7765	0,1483	20,3682	21,2340
f_{13}	21,4627	0,1775	20,9273	21,9467
f_{14}	22,7750	0,2065	22,1412	23,4266
f_{15}	26,8633	0,1944	26,2128	27,4362
f_{16}	27,4052	0,2277	26,7660	28,2157
f_{17}	28,7942	0,2638	27,9919	29,6097

A.4 Weitere mathematische Grundlagen

Im Folgenden werden ergänzend zu Kapitel 3 grundlegende statistische Begrifflichkeiten erklärt und entsprechende Zusammenhänge aufgezeigt. Die Ausführungen in beziehen sich hauptsächlich auf [Papula 2011]. In diesem Abschnitt wird daher nicht explizit darauf verwiesen; ergänzende Literatur wird jedoch an entsprechender Stelle genannt.

A.4.1 Zufallsgrößen

A.4.1.1 Stetige Zufallsgrößen und deren Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Die Begriffe *Zufallsgröße* bzw. *Zufallsvariable* bezeichnen eine Funktion, die jedem Elementarereignis aus der Ergebnismenge eines Zufallsexperiments genau einen reellen Zahlenwert zuordnet. Elementarereignisse sind die möglichen, sich gegenseitig ausschließenden Ergebnisse eines Zufallsexperiments, die Ergebnismenge ist die Menge aller dieser Elementarereignisse. Zufallsgrößen selbst werden mit großen, ihre Werte bzw. *Realisierungen* mit kleinen lateinischen Buchstaben gekennzeichnet. Neben dem Wertebereich ist die *Wahrscheinlichkeitsverteilung* (auch kurz als *Verteilung* bezeichnet) einer Zufallsgröße von besonderer Bedeutung. Zur vollständigen Beschreibung einer Zufallsgröße X bzw. deren Verteilung dient ihre *Verteilungsfunktion* F_X . Wie in Gl. (A.2) gezeigt ist, bestimmt die Verteilungsfunktion F_X , mit welcher Wahrscheinlichkeit P die Zufallsgröße X einen Wert annimmt, der kleiner oder gleich einer reellen Zahl x ist.

$$F_X(x) = P(X \leq x) \tag{A.2}$$

Stetige Zufallsgrößen können im Gegensatz zu diskreten Zufallsgrößen, die durch endlich viele bzw. abzählbar unendlich viele mögliche Werte gekennzeichnet sind, jeden beliebigen Wert aus einem endlichen oder unendlichen Intervall annehmen. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden lediglich Zufallsgrößen mit (absolut) stetiger Verteilung betrachtet. Dies bedeutet, dass die stetige Verteilungsfunktion F_X wie in Gl. (A.3) gezeigt als Integral einer nichtnegativen *Dichtefunktion* f_X dargestellt werden kann [Henze 2012].

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt \tag{A.3}$$

An den Stellen, an denen die Dichtefunktion f_X stetig ist, ist die Verteilungsfunktion F_X differenzierbar und die Dichtefunktion damit die 1. Ableitung der Verteilungsfunktion.

Der Flächeninhalt unter der Dichtefunktion beträgt genau 1. Die Verteilungsfunktion selbst ist eine monoton wachsende Funktion, die sich im Unendlichen wie in Gl. (A.4a) und Gl. (A.4b) gezeigt asymptotisch verhält und damit Werte zwischen 0 und 1 (also zwischen 0 % und 100 %) annehmen kann.

$$F_X(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0 \quad (\text{A.4a})$$

$$F_X(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1 \quad (\text{A.4b})$$

Die Wahrscheinlichkeit P dafür, dass der Wert einer Zufallsgrößen X in einem bestimmten Intervall zwischen x_1 und x_2 liegt, kann mit Hilfe der Verteilungsfunktion F_X bzw. der Dichtefunktion f_X wie in Gl. (A.5) gezeigt berechnet werden.

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1) = \int_{-\infty}^{x_2} f_X(x) dx - \int_{-\infty}^{x_1} f_X(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x) dx \quad (\text{A.5})$$

Das p -Quantil einer stetigen Verteilung ist der Wert x_p , für den die Verteilungsfunktion F_X einen Funktionswert (also eine Wahrscheinlichkeit) von p annimmt. Anschaulich betrachtet legt das p -Quantil den Wert x_p fest, den eine Zufallsgröße X mit der Wahrscheinlichkeit p nicht überschreitet [Schlittgen 2003].

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße kann alternativ zur Beschreibung durch Verteilungsfunktion bzw. Dichtefunktion auch mit Hilfe von bestimmten Parametern charakterisiert werden. Wichtige Parameter sind der *Erwartungswert* μ_X , die *Varianz* σ_X^2 und die *Standardabweichung* σ_X . Der Erwartungswert gibt die Mitte bzw. das Zentrum der Wahrscheinlichkeitsverteilung und damit den Wert an, den eine Zufallsgröße im Mittel annimmt. Varianz und Standardabweichung beschreiben die Streuung der möglichen Werte der Zufallsgröße um diesen Mittelwert, wobei die Standardabweichung der Wurzel aus der Varianz entspricht. Für eine stetige Zufallsgröße X mit der Dichtefunktion f_X ergeben sich Erwartungswert μ_X und Varianz σ_X^2 nach Gl. (A.6a) und Gl. (A.6b).

$$\mu_X = \text{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) dx \quad (\text{A.6a})$$

$$\sigma_X^2 = \text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 \cdot f_X(x) dx \quad (\text{A.6b})$$

Eine Zufallsgröße X mit dem Erwartungswert μ_X und der Varianz σ_X^2 kann durch lineare Transformation in eine Zufallsgröße $Y = a \cdot X + b$ überführt werden. Der Erwartungswert μ_Y und Varianz σ_Y^2 dieser Zufallsgröße Y lassen sich nach Gl. (A.7a) und Gl. (A.7b) berechnen.

$$\mu_Y = E(Y) = E(a \cdot X + b) = a \cdot E(X) + b = a \cdot \mu_X + b \quad (\text{A.7a})$$

$$\sigma_Y^2 = \text{Var}(Y) = \text{Var}(a \cdot X + b) = a^2 \cdot \text{Var}(X) = a^2 \cdot \sigma_X^2 \quad (\text{A.7b})$$

Eine Anzahl von n Zufallsgrößen sind *stochastisch unabhängig*, falls jede Zufallsgröße einen Wert unabhängig von den Werten der anderen Zufallsgrößen annimmt. Mathematisch formuliert sind die Zufallsgrößen unabhängig, wenn für ihre Verteilungsfunktionen F_{X_1}, \dots, F_{X_n} sowie eine gemeinsame n -dimensionale Verteilungsfunktion F der in Gl. (A.8) gezeigte Zusammenhang für alle x_1, \dots, x_n gilt.

$$F(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot \dots \cdot F_{X_n}(x_n) \quad (\text{A.8})$$

Der Erwartungswert μ_Y der Zufallsgröße Y , die der Summe von n Zufallsgrößen X_1, \dots, X_n entspricht, lässt sich wie in Gl. (A.9a) gezeigt aus der Summe der Erwartungswerte der addierten Zufallsgrößen ermitteln. Der Varianz σ_Y^2 der Zufallsgröße Y , die der Summe von n stochastisch unabhängigen Zufallsgrößen X_1, \dots, X_n entspricht, lässt sich wie in Gl. (A.9b) gezeigt aus der Summe der Varianzen der addierten Zufallsgrößen ermitteln.

$$\mu_Y = E(Y) = E(X_1 + \dots + X_n) = E(X_1) + \dots + E(X_n) = \mu_{X_1} + \dots + \mu_{X_n} \quad (\text{A.9a})$$

$$\sigma_Y^2 = \text{Var}(Y) = \text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \text{Var}(X_1) + \dots + \text{Var}(X_n) = \sigma_{X_1}^2 + \dots + \sigma_{X_n}^2 \quad (\text{A.9b})$$

In Anhang A.4.1.2 ist die *Normalverteilung* als Beispiel für eine in den Anwendungen weit verbreitete stetige Verteilung beschrieben. In Anhang A.4.1.3 ist knapp auf die sogenannte *F-Verteilung* als weitere für diese Arbeit wichtige Verteilung eingegangen.

A.4.1.2 Normalverteilung und Standardnormalverteilung

Die für viele praktische Anwendungen wichtigste stetige Verteilung ist die sogenannte *Normalverteilung*, mit der sich in Naturwissenschaft und Technik zahlreiche Größen beschreiben lassen. Eine normalverteilte Zufallsgröße X ist durch die in Gl. (A.10a) gezeigte

Dichtefunktion f_X mit den Parametern μ_X und σ_X^2 (bzw. σ_X) gekennzeichnet. Die Parameter μ_X und σ_X^2 (bzw. σ_X) entsprechen dabei dem Erwartungswert und der Varianz (bzw. der Standardabweichung) einer normalverteilten Zufallsgröße X . Die Variable x entspricht einem Wert der Zufallsgröße X (mit $-\infty < x < \infty$). Aus der Dichtefunktion resultiert die in Gl. (A.10b) gezeigte Verteilungsfunktion F_X einer normalverteilten Zufallsgröße X .

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_X} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2} \quad (\text{A.10a})$$

$$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_X} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{t-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2} dt \quad (\text{A.10b})$$

Für eine normalverteilte Zufallsgröße X mit beliebigen Parametern μ_X und σ_X^2 gilt allgemein, dass der Wert x der Zufallsgröße X mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 68,3% innerhalb der einfachen, mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 95,4% innerhalb der zweifachen und mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 99,7% innerhalb der dreifachen Standardabweichung σ_X um den Erwartungswert μ_X der Zufallsgröße liegt.

Abbildung A.20 zeigt die Dichtefunktion f_X und die Verteilungsfunktion F_X einer normalverteilten Zufallsgröße X für verschiedene Kombinationen der Parameter μ_X und σ_X . Aufgrund ihrer Form wird die Dichtefunktion auch als *Gaußsche Glockenkurve* bezeichnet.

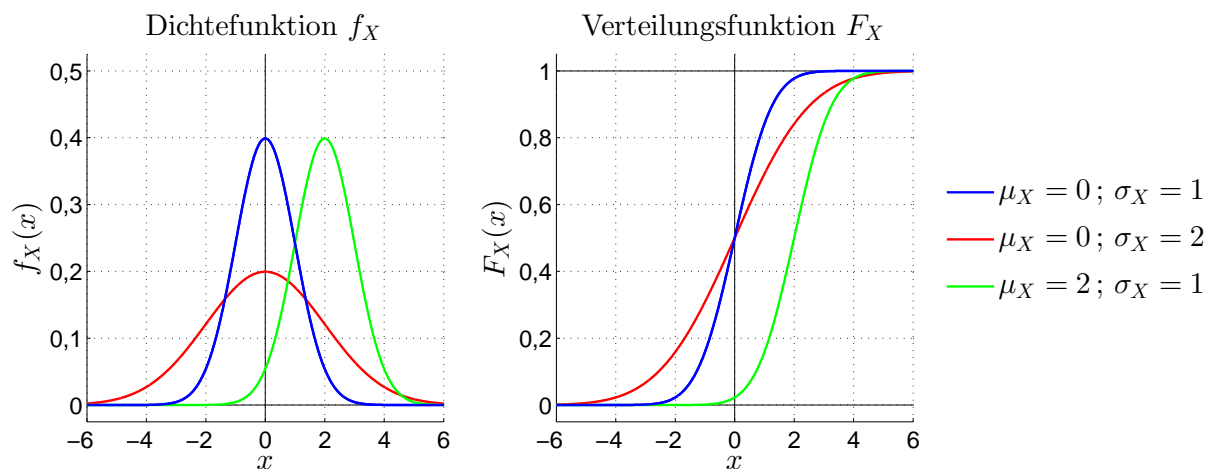


Abbildung A.20: Darstellung der Dichtefunktion f_X und der Verteilungsfunktion F_X einer normalverteilten Zufallsgröße X für verschiedene Werte der Parameter μ_X (Erwartungswert) und σ_X (Standardabweichung)

Eine mit den Parametern μ_X (Erwartungswert) und σ_X^2 bzw. σ_X (Varianz bzw. Standardabweichung) normalverteilte Zufallsgröße X kann auch verkürzt wie in Gl. (A.11) gezeigt dargestellt werden [Schlittgen 2003].

$$X \sim \mathcal{N}(\mu_X; \sigma_X^2) \quad (\text{A.11})$$

Eine Normalverteilung mit einem Erwartungswert von 0 und einer Varianz von 1 wird auch als *Standardnormalverteilung* bezeichnet. Die Dichtefunktion φ_U und die Verteilungsfunktion ϕ_U einer standardnormalverteilten Zufallsgröße U sind in Gl. (A.12a) und Gl. (A.12b) gezeigt.

$$\varphi_U(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot u^2} \quad (\text{A.12a})$$

$$\phi_U(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^u e^{-\frac{1}{2} \cdot t^2} dt \quad (\text{A.12b})$$

Die Variable u in Gl. (A.12a) und Gl. (A.12b) entspricht einem Wert der Zufallsgröße U (mit $-\infty < u < \infty$). Die Funktionswerte der Verteilungsfunktion ϕ_U sind tabelliert.

Der Verteilungstyp einer normalverteilten Zufallsgröße X mit den Parametern μ_X und σ_X^2 ändert sich im Allgemeinen nicht durch eine beliebige lineare Transformation zu $Y = a \cdot X + b$ (mit $a \neq 0$). Die neue Zufallsgröße Y ist dann wiederum normalverteilt sowie durch den Erwartungswert μ_Y und die Varianz σ_Y^2 gekennzeichnet [Schlittgen 2003]. Erwartungswert und Varianz der Zufallsgröße Y können mit Hilfe von Gl. (A.7a) und Gl. (A.7b) berechnet werden. Insbesondere lässt sich jede normalverteilte Zufallsgröße X mit den Parametern μ_X und σ_X^2 zu einer standardnormalverteilten Zufallsgröße U mit den Parametern $\mu_U = 0$ und $\sigma_U^2 = 1$ transformieren. Die entsprechende Transformation dazu ist in Gl. (A.13) gezeigt.

$$U = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \quad (\text{A.13})$$

Weiterhin geht aus dem zentralen Grenzwertsatz hervor, dass die Summe aus n stochastisch unabhängigen Zufallsgrößen X_1, \dots, X_n mit gleicher Verteilungsfunktion sowie gleichem Erwartungswert μ und gleicher Varianz σ^2 eine Zufallsgröße Y ist, deren Verteilungsfunktion im Grenzfall $n \rightarrow \infty$ gegen die Verteilungsfunktion einer Normalverteilung

konvergiert. Der Erwartungswert μ_Y und Varianz σ_Y^2 der resultierenden Zufallsgröße Y können mit Hilfe von Gl. (A.14a) und Gl. (A.14b) ermittelt werden. Dies gilt darüber hinaus auch für den Fall, dass alle stochastisch unabhängigen Summanden durch unterschiedliche Erwartungswerte und Varianzen gekennzeichnet sind und nicht zwangsläufig derselben Verteilungsfunktion genügen. Für die meisten Anwendungen in der Praxis kann darüber hinaus bereits eine Summe von $n > 30$ stochastisch unabhängigen, beliebig verteilten Zufallsgrößen X_1, \dots, X_n als normalverteilte Zufallsgröße Y angesehen werden, sofern jede Zufallsgröße nur einen geringen Beitrag liefert (kein Summand dominiert).

$$\mu_Y = E(Y) = n \cdot \mu \quad (\text{A.14a})$$

$$\sigma_Y^2 = \text{Var}(Y) = n \cdot \sigma^2 \quad (\text{A.14b})$$

Da sich in vielen Fällen eine Zufallsgröße als Summe vieler stochastischer unabhängiger Summanden interpretieren lässt und die resultierende Zufallsgröße damit nach dem zentralen Grenzwertsatz annähernd normalverteilt ist, wird ersichtlich, warum die Normalverteilung eine überaus wichtige Rolle für die meisten technischen Anwendungen spielt. So können zum Beispiel Messfehler oder geometrische Abweichungen von Bauteilen als Realisierungen normalverteilter Zufallsgrößen angesehen werden, die sich aus der Summe zahlreicher unabhängiger (beliebig verteilter) Zufallsgrößen ergeben.

A.4.1.3 F-Verteilung

Die Quadratsumme $Z_n = \chi_n^2 = U_1^2 + \dots + U_n^2$ aus n stochastisch unabhängigen und standardnormalverteilten Zufallsgrößen U_1, \dots, U_n ist eine sogenannte χ^2 -verteilte Zufallsgröße mit n Freiheitsgraden. Eine solche Zufallsgröße Z_n besitzt den Erwartungswert $\mu_{Z_n} = E(Z_n) = n$ und die Varianz $\sigma_{Z_n}^2 = \text{Var}(Z_n) = 2n$. Die χ^2 -Verteilung nähert sich für große Freiheitsgrade n einer $(n; 2n)$ -Normalverteilung. Die Summe stochastisch unabhängiger χ^2 -verteilter Zufallsgrößen ist wiederum eine χ^2 -verteilte Zufallsgröße, deren Freiheitsgrad sich aus der Summe der Freiheitsgrade der Summanden ergibt.

Die sogenannte *F-Verteilung* (auch *Fisher-Verteilung* genannt) ist ebenfalls eine stetige Verteilung. Eine F -verteilte Zufallsgröße $V_{m,n}$ mit den Freiheitsgraden m und n ist durch die in Gl. (A.15) gezeigte Dichtefunktion $f_{V_{m,n}}$ gekennzeichnet [Heinhold 1979]. Die Variable v entspricht dabei einem Wert der Zufallsgröße $V_{m,n}$ (mit $v > 0$). Die Terme $\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)$ und $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ sind Funktionswerte der sogenannten *Gammafunktion*.

$$f_{V_{m,n}} = \left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{m}{2}} \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2} + \frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{v^{\left(\frac{m}{2}-1\right)}}{\left(\frac{m}{2} \cdot v + \frac{n}{2}\right)^{\left(\frac{m}{2} + \frac{n}{2}\right)}} \quad (\text{A.15})$$

Die zugehörige Verteilungsfunktion $F_{V_{m,n}}$ entspricht dem Integral der Dichtefunktion $f_{V_{m,n}}$ in den Grenzen von 0 bis v . Die Werte einer allgemeinen Gammafunktion $\Gamma(a)$ ergeben sich nach den in Gl. (A.16a) und Gl. (A.16b) gezeigten Rechenvorschriften.

$$\Gamma(1) = 1 \quad \text{und} \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (\text{A.16a})$$

$$\Gamma(a+1) = a \cdot \Gamma(a) \quad (\text{für } a > 0) \quad (\text{A.16b})$$

Abbildung A.21 zeigt die Dichtefunktion $f_{V_{m,n}}$ und die Verteilungsfunktion $F_{V_{m,n}}$ einer F -verteilten Zufallsgröße $V_{m,n}$ für verschiedene Freiheitsgrade m und n .

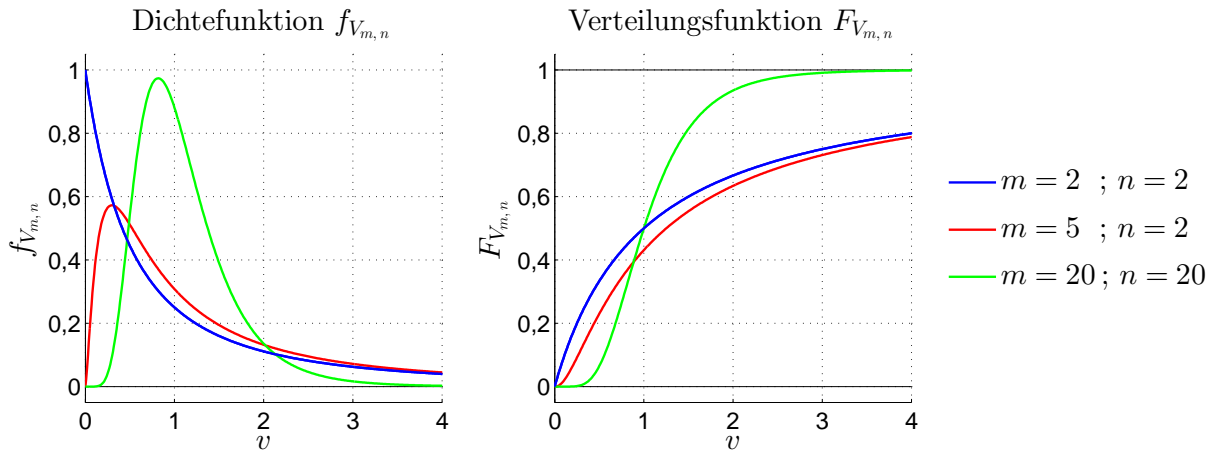


Abbildung A.21: Darstellung der Dichtefunktion $f_{V_{m,n}}$ und der Verteilungsfunktion $F_{V_{m,n}}$ einer F -verteilten Zufallsgröße $V_{m,n}$ für verschiedene Freiheitsgrade m und n

Der in Gl. (A.17) dargestellte Quotient aus zwei χ^2 -verteilten Zufallsgrößen Z_m und Z_n ist eine F -verteilte Zufallsgröße $V_{m,n}$ mit den Freiheitsgraden m und n [Heinhold 1979].

$$V_{m,n} = \frac{Z_m/m}{Z_n/n} \quad (\text{A.17})$$

Eine F -verteilte Zufallsgröße $V_{m,n}$ hat für $n \geq 3$ den in Gl. (A.18a) gezeigten Erwartungswert $\mu_{V_{m,n}}$ und die in Gl. (A.18b) gezeigte Varianz $\sigma_{V_{m,n}}^2$.

$$\mu_{V_{m,n}} = E(V_{m,n}) = \frac{n}{n-2} \quad (\text{A.18a})$$

$$\sigma_{V_{m,n}}^2 = \text{Var}(V_{m,n}) = \frac{2n^2(m+n-2)}{n(n-2)^2(n-4)} \quad (\text{A.18b})$$

Die F -Verteilung wird für diverse statistische Tests, z. B. zur Auswahl signifikanter Eingangsgrößen bei der schrittweisen Regressionsanalyse (siehe Kapitel 3) genutzt.

A.4.2 Begriff der Stichprobe und Parameterschätzung

Eine *Stichprobe* vom Umfang n mit den *Stichprobenwerten* x_1, \dots, x_n besteht aus n Realisierungen einer Zufallsgröße X bzw. aus n Realisierungen stochastisch unabhängiger und identisch wie X verteilter Zufallsgrößen X_1, \dots, X_n . Die Zufallsgrößen X_1, \dots, X_n werden auch als *Stichprobenvariablen* bezeichnet. Die Stichprobenvariablen können als n -dimensionaler Zufallsvektor \vec{X} aufgefasst werden [Heinhold 1979].

In der Statistik besteht die Aufgabe oftmals darin, aus einer Stichprobe mit den Stichprobenwerten x_1, \dots, x_n auf die Grundgesamtheit und deren Verteilung (und damit auf die Verteilung der Zufallsgröße X) zu schließen. Zur Schätzung eines unbekanntes Parameters θ einer Wahrscheinlichkeitsverteilung dient eine geeignete *Stichprobenfunktion* $\Theta = g(X_1, \dots, X_n)$, welche auch als *Schätzfunktion* für den Parameter θ bezeichnet wird. Mit Hilfe der Schätzfunktion Θ und einer Stichprobe x_1, \dots, x_n kann ein Schätzwert $\hat{\theta} = g(x_1, \dots, x_n)$ für den unbekanntes Parameter θ ermittelt werden. Eine geeignete Schätzfunktion Θ ist dabei

- *erwartungstreu*, d. h. ihr Erwartungswert $E(\theta)$ stimmt mit dem Parameter θ überein,
- *konsistent*, d. h. sie konvergiert mit steigendem Stichprobenumfang n gegen den Parameter θ , und
- *effizient*, d. h. es existiert bei gegebenem Stichprobenumfang n keine andere geeignete Schätzfunktion mit kleinerer Varianz [Heinhold 1979].

Beispielsweise sind die in Gl. (A.19a) und Gl. (A.19b) gezeigten Stichprobenfunktionen \bar{X} bzw. S^2 geeignete Schätzfunktionen für den Erwartungswert μ_X bzw. die Varianz σ_X^2 einer Zufallsgröße X .

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (\text{A.19a})$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (\text{A.19b})$$

Mit Hilfe dieser Stichprobenfunktionen und n konkreten Stichprobenwerten x_1, \dots, x_n können Schätzwerte $\hat{\mu}_X$ bzw. $\hat{\sigma}_X^2$ für die unbekannt Parameter Erwartungswert μ_X bzw. Varianz σ_X^2 bestimmt werden. Entsprechende Formeln für die Stichprobenwerte x_1, \dots, x_n sind in Gl. (A.20a) und Gl. (A.20b) gezeigt.

$$\hat{\mu}_X = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \approx \mu_X \quad (\text{A.20a})$$

$$\hat{\sigma}_X^2 = s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \approx \sigma_X^2 \quad (\text{A.20b})$$

Dabei sind \bar{x} und s^2 in Gl. (A.20a) und Gl. (A.20b) der Stichprobenmittelwert sowie die Stichprobenvarianz (auch empirische Varianz genannt) der Stichprobe x_1, \dots, x_n . Die entsprechenden Formeln sind die allgemein bekannten Formeln zur Berechnung von Mittelwert und Varianz einer Stichprobe.

Der Vollständigkeit halber ist erwähnt, dass aus der Schätzung eines Parameters θ nicht hervorgeht, wie stark der tatsächliche (unbekannte) Wert des Parameters θ von einem auf Basis einer Stichprobe x_1, \dots, x_n ermittelten Schätzwert $\hat{\theta}$ abweicht. Dies kann jedoch bei Kenntnis der Verteilungsart mit Hilfe eines *Konfidenzintervalls* (auch *Vertrauensintervall* genannt) angegeben werden. Ein Konfidenzintervall beschreibt ein Intervall, in dem der unbekannte Wert des Parameters θ mit einer Wahrscheinlichkeit $\gamma = 1 - \alpha$ enthalten ist. Die Variablen γ und α sind dabei das sogenannte *Konfidenzniveau* sowie die sogenannte *Irrtumswahrscheinlichkeit*. Da die Konstruktion von Konfidenzintervallen nicht Gegenstand dieser Arbeit ist, wird nicht näher darauf eingegangen.

A.4.3 Pearsonscher Korrelationskoeffizient

Der Grad des linearen Zusammenhangs zwischen den jeweils n paarweisen Stichprobenwerten x_1, \dots, x_n und y_1, \dots, y_n der beiden Zufallsgrößen X und Y kann mit Hilfe des *empirischen (Pearsonschen) Korrelationskoeffizienten* r ermittelt werden. Die entsprechende Berechnungsvorschrift ist in Gl. (A.21) gezeigt. Die Variablen s_x und s_y sind die (empirischen) Standardabweichungen der Stichprobenwerte, die Variable s_{xy} entspricht der *empirischen Kovarianz*. Die Variablen \bar{x} und \bar{y} stellen die Stichprobenmittelwerte dar, die wiederum nach Gl. (A.20a) ermittelt werden können. Der empirische Korrelationskoeffizient r kann Werte zwischen -1 und 1 annehmen, wobei ein betragsmäßiger Wert

nahe 1 (also $|r| \approx 1$) auf einen sehr hohen linearen Zusammenhang zwischen den Zufallsgrößen X und Y hindeutet. Ein Wert nahe 0 (also $r \approx 0$) bedeutet, dass die Zufallsgrößen X und Y unkorreliert, jedoch nicht zwangsläufig stochastisch unabhängig sind.

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = \frac{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \quad (\text{A.21})$$

A.4.4 Statistische Hypothesen und statistische Parametertests

Eine Annahme oder Vermutung über die Verteilung einer Zufallsgröße und deren Parameter wird als *statistische Hypothese* bezeichnet. Hypothesen bezüglich eines Parameters einer vom Verteilungstyp her bekannten Zufallsgröße können auf Basis einer Stichprobe mit Hilfe eines *Parametertests* überprüft werden. Bei einem solchen Test werden eine *Nullhypothese* H_0 sowie eine *Alternativhypothese* H_1 gegenübergestellt, wobei als Ergebnis entweder die Nullhypothese beibehalten (nicht abgelehnt) oder zugunsten der Alternativhypothese verworfen (abgelehnt) wird. Da jede Testentscheidung auf Basis einer konkreten Zufallsstichprobe geschieht, besteht die Möglichkeit eines Irrtums, d. h. dass eine Nullhypothese fälschlicherweise verworfen bzw. beibehalten wird. Dabei sind zwei Fehlerarten zu unterscheiden. Ein *Fehler 1. Art* bezeichnet das Ablehnen einer an sich richtigen Nullhypothese. Im Gegensatz dazu bezeichnet ein *Fehler 2. Art* das Beibehalten einer an sich falschen Nullhypothese. Die Wahrscheinlichkeiten für einen Fehler 1. Art bzw. 2. Art werden mit α bzw. β bezeichnet.

Im Folgenden wird das Prinzip eines Parametertests am Beispiel eines *zweiseitigen Tests* knapp beschrieben. Für einen unbekanntem Parameter θ einer Zufallsgröße X mit bekannter Wahrscheinlichkeitsverteilung werden zunächst eine Nullhypothese H_0 sowie eine Alternativhypothese H_1 aufgestellt. Bei einem *zweiseitigen Test* wird beispielsweise die Nullhypothese $H_0 : \theta = \theta_0$ gegen die Alternativhypothese $H_1 : \theta \neq \theta_0$ getestet, wobei θ_0 ein möglicher Wert des Parameters θ ist. Auf Basis der Verteilung der Zufallsgröße X (bzw. der identisch verteilten Stichprobenvariablen X_1, X_2, \dots, X_n) wird eine geeignete Testgröße $T = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ bestimmt. Diese entspricht wiederum einer Stichprobenfunktion bzw. Zufallsgröße mit bekannter Wahrscheinlichkeitsverteilung. Mit Hilfe eines festgelegten *Signifikanzniveaus* α (auch als *Irrtumswahrscheinlichkeit* bezeichnet) (mit $0 < \alpha < 1$), das der maximal zulässigen Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art bei dem Test entspricht, werden daraufhin kritische Grenzen c_u und c_o für die

Testgröße T bestimmt. Die Grenzen c_u und c_o werden so gewählt, dass die Testgröße T unter der Annahme der Nullhypothese H_0 mit der Wahrscheinlichkeit $\gamma = 1 - \alpha$ im Intervall $c_u \leq T \leq c_o$ liegt. Mit Hilfe von n Stichprobenwerten x_1, x_2, \dots, x_n (Realisierungen der Zufallsgrößen X_1, X_2, \dots, X_n) wird ein Wert $\hat{t} = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ der Testgröße T ermittelt. Liegt der Wert \hat{t} zwischen den beiden kritischen Grenzen c_u und c_o , also falls $c_u \leq \hat{t} \leq c_o$, wird die Nullhypothese H_0 beibehalten. Im anderen Fall wird die Nullhypothese H_0 zugunsten der Alternativhypothese H_1 verworfen.

Alternativ kann eine Testentscheidung anhand des sogenannten *empirischen Signifikanzniveaus* p (auch *p-Wert* genannt) getroffen werden. Dabei stellt das empirische Signifikanzniveau p das Signifikanzniveau α eines statistischen Tests dar, bei welchem eine Nullhypothese H_0 gerade noch zugunsten der Alternativhypothese H_1 verworfen würde. Ist das empirische Signifikanzniveau p größer als das tatsächliche Signifikanzniveau α , wird die Nullhypothese H_0 beibehalten, andernfalls zugunsten der Alternativhypothese H_1 verworfen [Schlittgen 2003, Jann 2005].

Die Wahrscheinlichkeiten α bzw. β für einen Fehler 1. Art bzw. einen Fehler 2. Art sind miteinander verknüpft, wobei eine Verkleinerung von α gleichzeitig eine Vergrößerung von β (bei gleichem Stichprobenumfang) und umgekehrt zur Folge hat. Je nachdem welche Fehlerart für eine bestimmte Problemstellung schwerwiegendere Folgen hat, kann ein entsprechender Wert für das Signifikanzniveau α gewählt werden. Ist ein irrtümliches Ablehnen einer richtigen Nullhypothese (Fehler 1. Art) mit schwerwiegenden Folgen verbunden, so sollte ein niedriger Wert für α gewählt werden (z. B. $\alpha = 0,01$ oder sogar $\alpha = 0,001$). Im Gegensatz dazu sollte ein höherer Wert für α gewählt werden (z. B. $\alpha = 0,1$ oder sogar $\alpha = 0,05$), falls ein irrtümliches Beibehalten einer falschen Nullhypothese mit schwerwiegenden Folgen verbunden ist.

Prinzipiell hat ein Parametertest die beste Aussagekraft, wenn die Nullhypothese auf Basis des gewählten Signifikanzniveaus abgelehnt und damit die Alternativhypothese angenommen werden kann, also wenn das Resultat statistisch signifikant ist. Denn in diesem Fall wurde entweder die richtige Entscheidung getroffen (Alternativhypothese entspricht der Realität) oder es liegt ein Fehler 1. Art vor, dessen maximale Wahrscheinlichkeit α bekannt ist und als Signifikanzniveau zuvor festgelegt wurde. Ist ein Testresultat allerdings nicht signifikant, also darf die Nullhypothese nicht abgelehnt werden, kann daraus nicht direkt geschlossen werden, dass die Nullhypothese gilt, da die Wahrscheinlichkeit β für einen Fehler 2. Art nicht bekannt ist [Jann 2005].

A.5 Konkrete Schätzwerte der Modellparameter

Ergänzend zu den bereits in Kapitel 6 für alle Geometrieparameter gezeigten Regressionsfunktionen sind im Folgenden die konkreten Schätzwerte der in den Funktionen berücksichtigten Modellparameter angegeben.

Die Variablen $f_{i|1}, \dots, f_{i|17}$ kennzeichnen die ersten $m = 17$ Eigenfrequenzen der i -ten Pleuelstange, die Variablen $\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_{17}, \hat{\alpha}_{1|2}, \hat{\alpha}_{1|3}, \dots, \hat{\alpha}_{16|17}$ stehen stellvertretend für die Schätzwerte der Modellparameter. Der Schätzwert $\hat{\alpha}_0$ hat die Einheit mm, die Schätzwerte $\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_{17}$ sind in der Einheit mm/kHz und die Schätzwerte $\hat{\alpha}_{1|2}, \hat{\alpha}_{1|3}, \dots, \hat{\alpha}_{16|17}$ in der Einheit mm/kHz² gegeben. Somit liefert jede Regressionsfunktion Schätzwerte in der Einheit mm, die Eigenfrequenzen müssen dazu in der Einheit kHz eingesetzt werden.

A.5.1 Geometrieparameter d_1

Zur Ermittlung eines Schätzwertes $\hat{d}_{i|1}$ für die tatsächliche Abmessung $d_{i|1}$ der i -ten Pleuelstange bzgl. des Geometrieparameters d_1 wurde die in Gl. (A.22) angegebene Regressionsfunktion bestimmt, Tabelle A.6 gibt die Werte der Modellparameter an.

$$\begin{aligned} \hat{d}_{i|1} = & + \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 \cdot f_{i|1} + \hat{\alpha}_3 \cdot f_{i|3} + \hat{\alpha}_5 \cdot f_{i|5} + \hat{\alpha}_7 \cdot f_{i|7} + \hat{\alpha}_{12} \cdot f_{i|12} + \hat{\alpha}_{13} \cdot f_{i|13} + \hat{\alpha}_{15} \cdot f_{i|15} \\ & + \hat{\alpha}_{17} \cdot f_{i|17} + \hat{\alpha}_{1|5} \cdot f_{i|1} \cdot f_{i|5} + \hat{\alpha}_{1|7} \cdot f_{i|1} \cdot f_{i|7} + \hat{\alpha}_{3|7} \cdot f_{i|3} \cdot f_{i|7} + \hat{\alpha}_{3|13} \cdot f_{i|3} \cdot f_{i|13} \\ & + \hat{\alpha}_{3|15} \cdot f_{i|3} \cdot f_{i|15} + \hat{\alpha}_{5|7} \cdot f_{i|5} \cdot f_{i|7} + \hat{\alpha}_{5|17} \cdot f_{i|5} \cdot f_{i|17} + \hat{\alpha}_{7|13} \cdot f_{i|7} \cdot f_{i|13} \\ & + \hat{\alpha}_{12|13} \cdot f_{i|12} \cdot f_{i|13} + \hat{\alpha}_{12|15} \cdot f_{i|12} \cdot f_{i|15} + \hat{\alpha}_{13|17} \cdot f_{i|13} \cdot f_{i|17} + \hat{\alpha}_{15|17} \cdot f_{i|15} \cdot f_{i|17} \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Tabelle A.6: Auflistung der bei der Kalibrierung für den Geometrieparameter d_1 ermittelten und in der Regressionsfunktion berücksichtigten Schätzwerte der Modellparameter

Variable	Wert	Variable	Wert
$\hat{\alpha}_0$	30,231 142	$\hat{\alpha}_{3 7}$	-0,317 864
$\hat{\alpha}_1$	-3,901 763	$\hat{\alpha}_{3 13}$	0,331 352
$\hat{\alpha}_3$	5,427 249	$\hat{\alpha}_{3 15}$	-0,327 651
$\hat{\alpha}_5$	-2,354 632	$\hat{\alpha}_{5 7}$	0,607 213
$\hat{\alpha}_7$	-1,031 332	$\hat{\alpha}_{5 17}$	-0,083 660
$\hat{\alpha}_{12}$	-0,730 094	$\hat{\alpha}_{7 13}$	-0,299 336
$\hat{\alpha}_{13}$	3,993 007	$\hat{\alpha}_{12 13}$	-0,049 526
$\hat{\alpha}_{15}$	-0,943 844	$\hat{\alpha}_{12 15}$	0,056 615
$\hat{\alpha}_{17}$	-1,091 985	$\hat{\alpha}_{13 17}$	0,000 705
$\hat{\alpha}_{1 5}$	-0,872 445	$\hat{\alpha}_{15 17}$	0,036 586
$\hat{\alpha}_{1 7}$	1,117 740		

A.5.2 Geometrieparameter d_2

Zur Ermittlung eines Schätzwertes $\widehat{d}_{i|2}$ für die tatsächliche Abmessung $d_{i|2}$ der i -ten Pleuelstange bzgl. des Geometrieparameters d_2 wurde die in Gl. (A.23) angegebene Regressionsfunktion bestimmt, Tabelle A.7 gibt die Werte der Modellparameter an.

$$\begin{aligned}
 \widehat{d}_{i|2} = & + \widehat{\alpha}_0 + \widehat{\alpha}_1 \cdot f_{i|1} + \widehat{\alpha}_2 \cdot f_{i|2} + \widehat{\alpha}_4 \cdot f_{i|4} + \widehat{\alpha}_5 \cdot f_{i|5} + \widehat{\alpha}_6 \cdot f_{i|6} + \widehat{\alpha}_7 \cdot f_{i|7} + \widehat{\alpha}_8 \cdot f_{i|8} \\
 & + \widehat{\alpha}_{10} \cdot f_{i|10} + \widehat{\alpha}_{11} \cdot f_{11} + \widehat{\alpha}_{12} \cdot f_{i|12} + \widehat{\alpha}_{13} \cdot f_{i|13} + \widehat{\alpha}_{15} \cdot f_{i|15} + \widehat{\alpha}_{16} \cdot f_{i|16} \\
 & + \widehat{\alpha}_{17} \cdot f_{i|17} + \widehat{\alpha}_{1|6} \cdot f_{i|1} \cdot f_{i|6} + \widehat{\alpha}_{1|7} \cdot f_{i|1} \cdot f_{i|7} + \widehat{\alpha}_{1|10} \cdot f_{i|1} \cdot f_{i|10} \\
 & + \widehat{\alpha}_{6|10} \cdot f_{i|6} \cdot f_{i|10} + \widehat{\alpha}_{7|8} \cdot f_{i|7} \cdot f_{i|8} + \widehat{\alpha}_{7|10} \cdot f_{i|7} \cdot f_{i|10}
 \end{aligned} \tag{A.23}$$

Tabelle A.7: Auflistung der bei der Kalibrierung für den Geometrieparameter d_2 ermittelten und in der Regressionsfunktion berücksichtigten Schätzwerte der Modellparameter

Variable	Wert
$\widehat{\alpha}_0$	-73,636 360
$\widehat{\alpha}_1$	-81,008 634
$\widehat{\alpha}_2$	-0,150 829
$\widehat{\alpha}_4$	45,235 632
$\widehat{\alpha}_5$	-5,325 865
$\widehat{\alpha}_6$	-16,573 569
$\widehat{\alpha}_7$	7,733 638
$\widehat{\alpha}_8$	8,923 424
$\widehat{\alpha}_{10}$	7,385 780
$\widehat{\alpha}_{11}$	-0,287 489
$\widehat{\alpha}_{12}$	0,723 625
$\widehat{\alpha}_{13}$	1,168 719
$\widehat{\alpha}_{15}$	-0,463 042
$\widehat{\alpha}_{16}$	-0,215 114
$\widehat{\alpha}_{17}$	0,193 297
$\widehat{\alpha}_{1 6}$	-0,913 472
$\widehat{\alpha}_{1 7}$	4,998 636
$\widehat{\alpha}_{1 10}$	-1,843 199
$\widehat{\alpha}_{6 10}$	0,480 333
$\widehat{\alpha}_{7 8}$	-0,932 326
$\widehat{\alpha}_{7 10}$	-0,449 641

A.5.3 Geometrieparameter d_3

Zur Ermittlung eines Schätzwertes $\hat{d}_{i|3}$ für die tatsächliche Abmessung $d_{i|3}$ der i -ten Pleuelstange bzgl. des Geometrieparameters d_3 wurde die in Gl. (A.24) angegebene Regressionsfunktion bestimmt, Tabelle A.8 gibt die Werte der Modellparameter an.

$$\begin{aligned}
 \hat{d}_{i|3} = & + \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 \cdot f_{i|1} + \hat{\alpha}_4 \cdot f_{i|4} + \hat{\alpha}_5 \cdot f_{i|5} + \hat{\alpha}_7 \cdot f_{i|7} + \hat{\alpha}_8 \cdot f_{i|8} + \hat{\alpha}_9 \cdot f_{i|9} \\
 & + \hat{\alpha}_{10} \cdot f_{i|10} + \hat{\alpha}_{11} \cdot f_{i|11} + \hat{\alpha}_{12} \cdot f_{i|12} + \hat{\alpha}_{13} \cdot f_{i|13} + \hat{\alpha}_{14} \cdot f_{i|14} + \hat{\alpha}_{1|4} \cdot f_{i|1} \cdot f_{i|4} \\
 & + \hat{\alpha}_{1|13} \cdot f_{i|1} \cdot f_{i|13} + \hat{\alpha}_{4|12} \cdot f_{i|4} \cdot f_{i|12} + \hat{\alpha}_{5|10} \cdot f_{i|5} \cdot f_{i|10} + \hat{\alpha}_{7|9} \cdot f_{i|7} \cdot f_{i|9} \\
 & + \hat{\alpha}_{7|12} \cdot f_{i|7} \cdot f_{i|12} + \hat{\alpha}_{8|12} \cdot f_{i|8} \cdot f_{i|12} + \hat{\alpha}_{8|14} \cdot f_{i|8} \cdot f_{i|14} + \hat{\alpha}_{11|13} \cdot f_{i|11} \cdot f_{i|13}
 \end{aligned} \tag{A.24}$$

Tabelle A.8: Auflistung der bei der Kalibrierung für den Geometrieparameter d_3 ermittelten und in der Regressionsfunktion berücksichtigten Schätzwerte der Modellparameter

Variable	Wert
$\hat{\alpha}_0$	54,773 553
$\hat{\alpha}_1$	-17,469 441
$\hat{\alpha}_4$	6,997 752
$\hat{\alpha}_5$	-1,156 091
$\hat{\alpha}_7$	-1,129 289
$\hat{\alpha}_8$	-1,079 283
$\hat{\alpha}_9$	4,174 787
$\hat{\alpha}_{10}$	-0,834 057
$\hat{\alpha}_{11}$	0,849 437
$\hat{\alpha}_{12}$	-4,333 279
$\hat{\alpha}_{13}$	-0,552 160
$\hat{\alpha}_{14}$	1,182 393
$\hat{\alpha}_{1 4}$	0,802 785
$\hat{\alpha}_{1 13}$	0,350 463
$\hat{\alpha}_{4 12}$	-0,223 787
$\hat{\alpha}_{5 10}$	0,083 858
$\hat{\alpha}_{7 9}$	-0,347 779
$\hat{\alpha}_{7 12}$	0,294 482
$\hat{\alpha}_{8 12}$	0,106 243
$\hat{\alpha}_{8 14}$	-0,070 537
$\hat{\alpha}_{11 13}$	-0,036 697

A.5.4 Geometrieparameter d_4

Zur Ermittlung eines Schätzwertes $\hat{d}_{i|4}$ für die tatsächliche Abmessung $d_{i|4}$ der i -ten Pleuelstange bzgl. des Geometrieparameters d_4 wurde die in Gl. (A.25) angegebene Regressionsfunktion bestimmt, Tabelle A.9 gibt die Werte der Modellparameter an.

$$\begin{aligned}
 \hat{d}_{i|4} = & + \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 \cdot f_{i|1} + \hat{\alpha}_4 \cdot f_{i|4} + \hat{\alpha}_5 \cdot f_{i|5} + \hat{\alpha}_7 \cdot f_{i|7} + \hat{\alpha}_8 \cdot f_{i|8} + \hat{\alpha}_9 \cdot f_{i|9} \\
 & + \hat{\alpha}_{10} \cdot f_{i|10} + \hat{\alpha}_{11} \cdot f_{i|11} + \hat{\alpha}_{12} \cdot f_{i|12} + \hat{\alpha}_{13} \cdot f_{i|13} + \hat{\alpha}_{15} \cdot f_{i|15} + \hat{\alpha}_{16} \cdot f_{i|16} \\
 & + \hat{\alpha}_{1|4} \cdot f_{i|1} \cdot f_{i|4} + \hat{\alpha}_{1|8} \cdot f_{i|1} \cdot f_{i|8} + \hat{\alpha}_{1|9} \cdot f_{i|1} \cdot f_{i|9} + \hat{\alpha}_{1|10} \cdot f_{i|1} \cdot f_{i|10} \\
 & + \hat{\alpha}_{1|11} \cdot f_{i|1} \cdot f_{i|11} + \hat{\alpha}_{5|15} \cdot f_{i|5} \cdot f_{i|15} + \hat{\alpha}_{7|15} \cdot f_{i|7} \cdot f_{i|15} + \hat{\alpha}_{12|13} \cdot f_{i|12} \cdot f_{i|13}
 \end{aligned} \tag{A.25}$$

Tabelle A.9: Auflistung der bei der Kalibrierung für den Geometrieparameter d_4 ermittelten und in der Regressionsfunktion berücksichtigten Schätzwerte der Modellparameter

Variable	Wert
$\hat{\alpha}_0$	58,254 764
$\hat{\alpha}_1$	-37,113 984
$\hat{\alpha}_4$	11,356 777
$\hat{\alpha}_5$	-18,496 640
$\hat{\alpha}_7$	13,243 886
$\hat{\alpha}_8$	-4,910 772
$\hat{\alpha}_9$	13,955 365
$\hat{\alpha}_{10}$	-3,074 593
$\hat{\alpha}_{11}$	3,248 659
$\hat{\alpha}_{12}$	-4,734 903
$\hat{\alpha}_{13}$	-2,766 879
$\hat{\alpha}_{15}$	0,532 411
$\hat{\alpha}_{16}$	-0,464 027
$\hat{\alpha}_{1 4}$	10,698 274
$\hat{\alpha}_{1 8}$	1,564 170
$\hat{\alpha}_{1 9}$	-6,589 711
$\hat{\alpha}_{1 10}$	1,649 569
$\hat{\alpha}_{1 11}$	-1,040 310
$\hat{\alpha}_{5 15}$	0,480 759
$\hat{\alpha}_{7 15}$	-0,433 363
$\hat{\alpha}_{12 13}$	0,104 957

A.5.5 Geometrieparameter h_1

Zur Ermittlung eines Schätzwertes $\hat{h}_{i|1}$ für die tatsächliche Abmessung $h_{i|1}$ der i -ten Pleuelstange bzgl. des Geometrieparameters h_1 wurde die in Gl. (A.26) angegebene Regressionsfunktion bestimmt, Tabelle A.10 gibt die Werte der Modellparameter an.

$$\begin{aligned}
 \hat{h}_{i|1} = & + \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 \cdot f_{i|1} + \hat{\alpha}_2 \cdot f_{i|2} + \hat{\alpha}_3 \cdot f_{i|3} + \hat{\alpha}_4 \cdot f_{i|4} + \hat{\alpha}_5 \cdot f_{i|5} + \hat{\alpha}_6 \cdot f_{i|6} \\
 & + \hat{\alpha}_7 \cdot f_{i|7} + \hat{\alpha}_8 \cdot f_{i|8} + \hat{\alpha}_9 \cdot f_9 + \hat{\alpha}_{10} \cdot f_{i|10} + \hat{\alpha}_{11} \cdot f_{i|11} + \hat{\alpha}_{12} \cdot f_{i|12} \\
 & + \hat{\alpha}_{13} \cdot f_{i|13} + \hat{\alpha}_{15} \cdot f_{i|15} + \hat{\alpha}_{1|11} \cdot f_{i|1} \cdot f_{i|11} + \hat{\alpha}_{1|13} \cdot f_{i|1} \cdot f_{i|13} \\
 & + \hat{\alpha}_{2|5} \cdot f_{i|2} \cdot f_{i|5} + \hat{\alpha}_{2|12} \cdot f_{i|2} \cdot f_{i|12} + \hat{\alpha}_{5|15} \cdot f_{i|5} \cdot f_{i|15} + \hat{\alpha}_{8|11} \cdot f_{i|8} \cdot f_{i|11}
 \end{aligned} \tag{A.26}$$

Tabelle A.10: Auflistung der bei der Kalibrierung für den Geometrieparameter h_1 ermittelten und in der Regressionsfunktion berücksichtigten Schätzwerte der Modellparameter

Variable	Wert
$\hat{\alpha}_0$	4,523 809
$\hat{\alpha}_1$	4,190 541
$\hat{\alpha}_2$	1,731 548
$\hat{\alpha}_3$	-1,843 020
$\hat{\alpha}_4$	-2,147 293
$\hat{\alpha}_5$	-1,772 579
$\hat{\alpha}_6$	2,872 485
$\hat{\alpha}_7$	0,752 878
$\hat{\alpha}_8$	-0,380 985
$\hat{\alpha}_9$	-0,004 634
$\hat{\alpha}_{10}$	-0,376 555
$\hat{\alpha}_{11}$	1,261 414
$\hat{\alpha}_{12}$	0,290 357
$\hat{\alpha}_{13}$	-0,614 478
$\hat{\alpha}_{15}$	-0,443 090
$\hat{\alpha}_{1 11}$	-0,054 668
$\hat{\alpha}_{1 13}$	0,211 271
$\hat{\alpha}_{2 5}$	-0,134 021
$\hat{\alpha}_{2 12}$	-0,114 131
$\hat{\alpha}_{5 15}$	0,050 242
$\hat{\alpha}_{8 11}$	-0,054 144

A.5.6 Geometrieparameter h_2

Zur Ermittlung eines Schätzwertes $\hat{h}_{i|2}$ für die tatsächliche Abmessung $h_{i|2}$ der i -ten Pleuelstange bzgl. des Geometrieparameters h_2 wurde die in Gl. (A.27) angegebene Regressionsfunktion bestimmt, Tabelle A.11 gibt die Werte der Modellparameter an.

$$\begin{aligned}
 \hat{h}_{i|2} = & + \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 \cdot f_{i|1} + \hat{\alpha}_4 \cdot f_{i|4} + \hat{\alpha}_5 \cdot f_{i|5} + \hat{\alpha}_7 \cdot f_{i|7} + \hat{\alpha}_8 \cdot f_{i|8} + \hat{\alpha}_9 \cdot f_{i|9} \\
 & + \hat{\alpha}_{10} \cdot f_{i|10} + \hat{\alpha}_{11} \cdot f_{i|11} + \hat{\alpha}_{12} \cdot f_{i|12} + \hat{\alpha}_{13} \cdot f_{i|13} + \hat{\alpha}_{14} \cdot f_{i|14} + \hat{\alpha}_{15} \cdot f_{i|15} \\
 & + \hat{\alpha}_{17} \cdot f_{i|17} + \hat{\alpha}_{1|4} \cdot f_{i|1} \cdot f_{i|4} + \hat{\alpha}_{7|9} \cdot f_{i|7} \cdot f_{i|9} + \hat{\alpha}_{7|13} \cdot f_{i|7} \cdot f_{i|13} \\
 & + \hat{\alpha}_{8|11} \cdot f_{i|8} \cdot f_{i|11} + \hat{\alpha}_{8|13} \cdot f_{i|8} \cdot f_{i|13} + \hat{\alpha}_{10|15} \cdot f_{i|10} \cdot f_{i|15} + \hat{\alpha}_{12|15} \cdot f_{i|12} \cdot f_{i|15}
 \end{aligned} \tag{A.27}$$

Tabelle A.11: Auflistung der bei der Kalibrierung für den Geometrieparameter h_2 ermittelten und in der Regressionsfunktion berücksichtigten Schätzwerte der Modellparameter

Variable	Wert
$\hat{\alpha}_0$	-0,316 091
$\hat{\alpha}_1$	-25,959 295
$\hat{\alpha}_4$	5,746 994
$\hat{\alpha}_5$	-4,103 336
$\hat{\alpha}_7$	3,723 179
$\hat{\alpha}_8$	-4,425 484
$\hat{\alpha}_9$	5,850 189
$\hat{\alpha}_{10}$	-2,354 048
$\hat{\alpha}_{11}$	3,218 325
$\hat{\alpha}_{12}$	1,994 659
$\hat{\alpha}_{13}$	-5,703 440
$\hat{\alpha}_{14}$	2,211 536
$\hat{\alpha}_{15}$	0,944 878
$\hat{\alpha}_{17}$	-0,199 438
$\hat{\alpha}_{1 4}$	1,018 794
$\hat{\alpha}_{7 9}$	-0,312 677
$\hat{\alpha}_{7 13}$	0,130 472
$\hat{\alpha}_{8 11}$	-0,191 194
$\hat{\alpha}_{8 13}$	0,241 663
$\hat{\alpha}_{10 15}$	0,078 541
$\hat{\alpha}_{12 15}$	-0,111 674

A.5.7 Geometrieparameter l

Zur Ermittlung eines Schätzwertes \hat{l}_i für die tatsächliche Abmessung l_i der i -ten Pleuelstange bzgl. des Geometrieparameters l wurde die in Gl. (A.28) angegebene Regressionsfunktion bestimmt, Tabelle A.12 gibt die Werte der Modellparameter an.

$$\begin{aligned}
 \hat{l}_i = & + \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 \cdot f_{i|1} + \hat{\alpha}_2 \cdot f_{i|2} + \hat{\alpha}_3 \cdot f_{i|3} + \hat{\alpha}_4 \cdot f_{i|4} + \hat{\alpha}_5 \cdot f_{i|5} + \hat{\alpha}_6 \cdot f_{i|6} \\
 & + \hat{\alpha}_7 \cdot f_{i|7} + \hat{\alpha}_8 \cdot f_{i|8} + \hat{\alpha}_9 \cdot f_{i|9} + \hat{\alpha}_{10} \cdot f_{i|10} + \hat{\alpha}_{11} \cdot f_{i|11} + \hat{\alpha}_{13} \cdot f_{i|13} \\
 & + \hat{\alpha}_{16} \cdot f_{i|16} + \hat{\alpha}_{1|7} \cdot f_{i|1} \cdot f_{i|7} + \hat{\alpha}_{1|9} \cdot f_{i|1} \cdot f_{i|9} + \hat{\alpha}_{1|13} \cdot f_{i|1} \cdot f_{i|13} \\
 & + \hat{\alpha}_{5|11} \cdot f_{i|5} \cdot f_{i|11} + \hat{\alpha}_{8|11} \cdot f_{i|8} \cdot f_{i|11} + \hat{\alpha}_{10|16} \cdot f_{i|10} \cdot f_{i|16} + \hat{\alpha}_{11|13} \cdot f_{i|11} \cdot f_{i|13}
 \end{aligned} \tag{A.28}$$

Tabelle A.12: Auflistung der bei der Kalibrierung für den Geometrieparameter l ermittelten und in der Regressionsfunktion berücksichtigten Schätzwerte der Modellparameter

Variable	Wert
$\hat{\alpha}_0$	156,877 878
$\hat{\alpha}_1$	11,979 991
$\hat{\alpha}_2$	-8,296 370
$\hat{\alpha}_3$	-8,142 246
$\hat{\alpha}_4$	-9,766 377
$\hat{\alpha}_5$	-20,617 612
$\hat{\alpha}_6$	19,944 971
$\hat{\alpha}_7$	1,641 990
$\hat{\alpha}_8$	0,544 109
$\hat{\alpha}_9$	0,186 462
$\hat{\alpha}_{10}$	-9,028 783
$\hat{\alpha}_{11}$	12,090 343
$\hat{\alpha}_{13}$	2,881 315
$\hat{\alpha}_{16}$	-4,089 428
$\hat{\alpha}_{1 7}$	1,740 885
$\hat{\alpha}_{1 9}$	-1,361 156
$\hat{\alpha}_{1 13}$	0,276 967
$\hat{\alpha}_{5 11}$	0,614 347
$\hat{\alpha}_{8 11}$	-0,591 332
$\hat{\alpha}_{10 16}$	0,241 128
$\hat{\alpha}_{11 13}$	-0,271 019

A.5.8 Geometrieparameter b

Zur Ermittlung eines Schätzwertes \hat{b}_i für die tatsächliche Abmessung b_i der i -ten Pleuelstange bzgl. des Geometrieparameters b wurde die in Gl. (A.29) angegebene Regressionsfunktion bestimmt, Tabelle A.13 gibt die Werte der Modellparameter an.

$$\begin{aligned}
 \hat{b}_i = & + \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 \cdot f_{i|1} + \hat{\alpha}_5 \cdot f_{i|5} + \hat{\alpha}_6 \cdot f_{i|6} + \hat{\alpha}_8 \cdot f_{i|8} + \hat{\alpha}_{10} \cdot f_{i|10} + \hat{\alpha}_{11} \cdot f_{i|11} \\
 & + \hat{\alpha}_{12} \cdot f_{i|12} + \hat{\alpha}_{13} \cdot f_{i|13} + \hat{\alpha}_{14} \cdot f_{i|14} + \hat{\alpha}_{15} \cdot f_{i|15} + \hat{\alpha}_{16} \cdot f_{i|16} + \hat{\alpha}_{17} \cdot f_{i|17} \\
 & + \hat{\alpha}_{1|13} \cdot f_{i|1} \cdot f_{i|13} + \hat{\alpha}_{1|17} \cdot f_{i|1} \cdot f_{i|17} + \hat{\alpha}_{5|12} \cdot f_{i|5} \cdot f_{i|12} + \hat{\alpha}_{8|13} \cdot f_{i|8} \cdot f_{i|13} \\
 & + \hat{\alpha}_{8|17} \cdot f_{i|8} \cdot f_{i|17} + \hat{\alpha}_{10|16} \cdot f_{i|10} \cdot f_{i|16} + \hat{\alpha}_{13|17} \cdot f_{i|13} \cdot f_{i|17} + \hat{\alpha}_{14|17} \cdot f_{i|14} \cdot f_{i|17}
 \end{aligned} \tag{A.29}$$

Tabelle A.13: Auflistung der bei der Kalibrierung für den Geometrieparameter b ermittelten und in der Regressionsfunktion berücksichtigten Schätzwerte der Modellparameter

Variable	Wert
$\hat{\alpha}_0$	-0,127 401
$\hat{\alpha}_1$	-7,782 603
$\hat{\alpha}_5$	0,927 520
$\hat{\alpha}_6$	3,918 134
$\hat{\alpha}_8$	1,234 061
$\hat{\alpha}_{10}$	-0,676 185
$\hat{\alpha}_{11}$	0,358 015
$\hat{\alpha}_{12}$	1,215 068
$\hat{\alpha}_{13}$	1,129 493
$\hat{\alpha}_{14}$	-1,220 943
$\hat{\alpha}_{15}$	-0,058 287
$\hat{\alpha}_{16}$	-0,945 572
$\hat{\alpha}_{17}$	0,415 044
$\hat{\alpha}_{1 13}$	0,600 023
$\hat{\alpha}_{1 17}$	-0,334 333
$\hat{\alpha}_{5 12}$	-0,182 169
$\hat{\alpha}_{8 13}$	-0,110 124
$\hat{\alpha}_{8 17}$	-0,074 834
$\hat{\alpha}_{10 16}$	0,045 778
$\hat{\alpha}_{13 17}$	-0,025 825
$\hat{\alpha}_{14 17}$	0,077 285

A.6 Weitere Ergebnisse

In dieser Arbeit erfolgt grundsätzlich die Ermittlung aller Regressionsfunktionen mit Hilfe des in Kapitel 5.3.2 beschriebenen, auf maximal 20 Schritte begrenzten Algorithmus. Ergänzend dazu werden die Berechnungen erneut durchgeführt, wobei jedoch bis zu 40 anstatt 20 Schritte zugelassen werden. In den resultierenden Regressionsfunktionen sind neben einer Konstanten je nach Geometrieparameter zwischen $k = 34$ (Geometrieparameter h_2) und $k = 40$ (Geometrieparameter d_3) weitere Terme enthalten. Auf eine Darstellung der Regressionsfunktionen wird jedoch aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet. Die aus den Berechnungen resultierenden Bestimmtheitsmaße liegen zwischen $R^2 = 0,99964$ (Geometrieparameter h_2) und $R^2 = 0,99999$ (Geometrieparameter h_1).

Auf Basis der entsprechenden Regressionsfunktionen werden wiederum Schätzwerte für die tatsächlichen Abmessungen aller Pleuelstangen berechnet und diese hinsichtlich der entsprechenden tatsächlichen Abmessungen analysiert. Dazu dienen die in Tabelle 5.2 aufgelisteten Kennwerte zur Charakterisierung der Differenzen e_i sowie des linearen Zusammenhangs zwischen den tatsächlichen Abmessungen und den entsprechenden Schätzwerten. Diese Kennwerte werden getrennt für die $n_{cal} = 600$ Kalibrierteile (Teilenummer $i = 1, \dots, 600$) sowie die $n_{val} = 200$ Validierteile (Teilenummer $i = 601, \dots, 800$) ermittelt. In Tabelle A.14 bis A.21 sind die resultierenden Kennwerte zusammengefasst. Mit Ausnahme des Korrelationskoeffizienten sind alle Kennwerte absolut (in mm) sowie relativ (in %) in Bezug auf den sechsfachen Wert der jeweiligen Standardabweichung (siehe Kapitel 5.1) angegeben. Auf die Darstellung der in Kapitel 5.3.3 genannten Diagramme sowie weiterer Ergebnisse wird ebenfalls verzichtet.

Tabelle A.14: Ergänzende Auflistung von Kennwerten zur Charakterisierung der Differenzen e_i sowie des linearen Zusammenhangs zwischen den tatsächlichen Abmessungen aller Teile bzgl. des Geometrieparameters d_1 und den Schätzwerten. Die Kennwerte sind separat für die $n_{cal} = 600$ Kalibrierteile sowie die $n_{val} = 200$ Validierteile errechnet. Mit Ausnahme des Korrelationskoeffizienten sind alle Kennwerte absolut (in mm) sowie relativ (in %) in Bezug auf den sechsfachen Wert der Standardabweichung σ_{D1} (siehe Kapitel 5.1, $6 \cdot \sigma_{D1} = 0,9$ mm) angegeben.

Kennwert	Kalibrierstichprobe		Validierstichprobe	
	absolut (mm)	relativ (%)	absolut (mm)	relativ (%)
Mittelwert \bar{e}	$2,0 \cdot 10^{-14}$	$2,2 \cdot 10^{-12}$	$5,1 \cdot 10^{-5}$	0,006
Standardabweichung s_e	0,0012	0,135	0,0015	0,165
Mittlerer Fehler $ \bar{e} $	0,0009	0,097	0,0010	0,110
Maximalfehler $ e_i _{max}$	0,0083	0,928	0,0097	1,080
Korrelationskoeffizient r	0,99996		0,99994	

Tabelle A.15: Ergänzende Auflistung von Kennwerten zur Charakterisierung der Differenzen e_i sowie des linearen Zusammenhangs zwischen den tatsächlichen Abmessungen aller Teile bzgl. des Geometrieparameters d_2 und den Schätzwerten. Die Kennwerte sind separat für die $n_{cal} = 600$ Kalibrierteile sowie die $n_{val} = 200$ Validierteile errechnet. Mit Ausnahme des Korrelationskoeffizienten sind alle Kennwerte absolut (in mm) sowie relativ (in %) in Bezug auf den sechsfachen Wert der Standardabweichung σ_{D2} (siehe Kapitel 5.1, $6 \cdot \sigma_{D2} = 1,2$ mm) angegeben.

Kennwert	Kalibrierstichprobe		Validierstichprobe	
	absolut (mm)	relativ (%)	absolut (mm)	relativ (%)
Mittelwert \bar{e}	$1,5 \cdot 10^{-13}$	$1,2 \cdot 10^{-11}$	$-8,9 \cdot 10^{-5}$	-0,007
Standardabweichung s_e	0,0034	0,282	0,0044	0,363
Mittlerer Fehler $ \bar{e} $	0,0024	0,199	0,0028	0,232
Maximalfehler $ e_i _{max}$	0,0239	1,988	0,0305	2,541
Korrelationskoeffizient r	0,99985		0,99976	

Tabelle A.16: Ergänzende Auflistung von Kennwerten zur Charakterisierung der Differenzen e_i sowie des linearen Zusammenhangs zwischen den tatsächlichen Abmessungen aller Teile bzgl. des Geometrieparameters d_3 und den Schätzwerten. Die Kennwerte sind separat für die $n_{cal} = 600$ Kalibrierteile sowie die $n_{val} = 200$ Validierteile errechnet. Mit Ausnahme des Korrelationskoeffizienten sind alle Kennwerte absolut (in mm) sowie relativ (in %) in Bezug auf den sechsfachen Wert der Standardabweichung σ_{D3} (siehe Kapitel 5.1, $6 \cdot \sigma_{D3} = 0,9$ mm) angegeben.

Kennwert	Kalibrierstichprobe		Validierstichprobe	
	absolut (mm)	relativ (%)	absolut (mm)	relativ (%)
Mittelwert \bar{e}	$5,3 \cdot 10^{-14}$	$5,9 \cdot 10^{-12}$	$-8,8 \cdot 10^{-5}$	-0,010
Standardabweichung s_e	0,0007	0,079	0,0009	0,105
Mittlerer Fehler $ \bar{e} $	0,0005	0,057	0,0007	0,073
Maximalfehler $ e_i _{max}$	0,0037	0,416	0,0038	0,426
Korrelationskoeffizient r	0,99999		0,99998	

Tabelle A.17: Ergänzende Auflistung von Kennwerten zur Charakterisierung der Differenzen e_i sowie des linearen Zusammenhangs zwischen den tatsächlichen Abmessungen aller Teile bzgl. des Geometrieparameters d_4 und den Schätzwerten. Die Kennwerte sind separat für die $n_{cal} = 600$ Kalibrierteile sowie die $n_{val} = 200$ Validierteile errechnet. Mit Ausnahme des Korrelationskoeffizienten sind alle Kennwerte absolut (in mm) sowie relativ (in %) in Bezug auf den sechsfachen Wert der Standardabweichung σ_{D4} (siehe Kapitel 5.1, $6 \cdot \sigma_{D4} = 1,2$ mm) angegeben.

Kennwert	Kalibrierstichprobe		Validierstichprobe	
	absolut (mm)	relativ (%)	absolut (mm)	relativ (%)
Mittelwert \bar{e}	$-4,7 \cdot 10^{-13}$	$-3,9 \cdot 10^{-11}$	-0,0003	-0,024
Standardabweichung s_e	0,0035	0,291	0,0039	0,329
Mittlerer Fehler $ \bar{e} $	0,0025	0,207	0,0027	0,227
Maximalfehler $ e_i _{max}$	0,0297	2,475	0,0240	1,996
Korrelationskoeffizient r	0,99985		0,99983	

Tabelle A.18: Ergänzende Auflistung von Kennwerten zur Charakterisierung der Differenzen e_i sowie des linearen Zusammenhangs zwischen den tatsächlichen Abmessungen aller Teile bzgl. des Geometrieparameters h_1 und den Schätzwerten. Die Kennwerte sind separat für die $n_{cal} = 600$ Kalibrierteile sowie die $n_{val} = 200$ Validierteile errechnet. Mit Ausnahme des Korrelationskoeffizienten sind alle Kennwerte absolut (in mm) sowie relativ (in %) in Bezug auf den sechsfachen Wert der Standardabweichung σ_{H1} (siehe Kapitel 5.1, $6 \cdot \sigma_{H1} = 0,9 \text{ mm}$) angegeben.

Kennwert	Kalibrierstichprobe		Validierstichprobe	
	absolut (mm)	relativ (%)	absolut (mm)	relativ (%)
Mittelwert \bar{e}	$3,6 \cdot 10^{-14}$	$4,0 \cdot 10^{-12}$	-0,0001	-0,013
Standardabweichung s_e	0,0005	0,060	0,0006	0,071
Mittlerer Fehler $ \bar{e} $	0,0004	0,046	0,0005	0,054
Maximalfehler $ e_i _{max}$	0,0020	0,218	0,0022	0,247
Korrelationskoeffizient r	0,99999		0,99999	

Tabelle A.19: Ergänzende Auflistung von Kennwerten zur Charakterisierung der Differenzen e_i sowie des linearen Zusammenhangs zwischen den tatsächlichen Abmessungen aller Teile bzgl. des Geometrieparameters h_2 und den Schätzwerten. Die Kennwerte sind separat für die $n_{cal} = 600$ Kalibrierteile sowie die $n_{val} = 200$ Validierteile errechnet. Mit Ausnahme des Korrelationskoeffizienten sind alle Kennwerte absolut (in mm) sowie relativ (in %) in Bezug auf den sechsfachen Wert der Standardabweichung σ_{H2} (siehe Kapitel 5.1, $6 \cdot \sigma_{H2} = 0,9 \text{ mm}$) angegeben.

Kennwert	Kalibrierstichprobe		Validierstichprobe	
	absolut (mm)	relativ (%)	absolut (mm)	relativ (%)
Mittelwert \bar{e}	$7,1 \cdot 10^{-14}$	$7,9 \cdot 10^{-12}$	-0,0001	-0,011
Standardabweichung s_e	0,0029	0,317	0,0032	0,351
Mittlerer Fehler $ \bar{e} $	0,0020	0,225	0,0022	0,243
Maximalfehler $ e_i _{max}$	0,0263	2,922	0,0223	2,476
Korrelationskoeffizient r	0,99982		0,99981	

Tabelle A.20: Ergänzende Auflistung von Kennwerten zur Charakterisierung der Differenzen e_i sowie des linearen Zusammenhangs zwischen den tatsächlichen Abmessungen aller Teile bzgl. des Geometrieparameters l und den Schätzwerten. Die Kennwerte sind separat für die $n_{cal} = 600$ Kalibrierteile sowie die $n_{val} = 200$ Validierteile errechnet. Mit Ausnahme des Korrelationskoeffizienten sind alle Kennwerte absolut (in mm) sowie relativ (in %) in Bezug auf den sechsfachen Wert der Standardabweichung σ_L (siehe Kapitel 5.1, $6 \cdot \sigma_L = 2,4 \text{ mm}$) angegeben.

Kennwert	Kalibrierstichprobe		Validierstichprobe	
	absolut (mm)	relativ (%)	absolut (mm)	relativ (%)
Mittelwert \bar{e}	$5,4 \cdot 10^{-13}$	$2,3 \cdot 10^{-11}$	-0,0009	-0,035
Standardabweichung s_e	0,0055	0,230	0,0059	0,244
Mittlerer Fehler $ \bar{e} $	0,0040	0,167	0,0044	0,181
Maximalfehler $ e_i _{max}$	0,0450	1,873	0,0269	1,121
Korrelationskoeffizient r	0,99991		0,99990	

Tabelle A.21: Ergänzende Auflistung von Kennwerten zur Charakterisierung der Differenzen e_i sowie des linearen Zusammenhangs zwischen den tatsächlichen Abmessungen aller Teile bzgl. des Geometrieparameters b und den Schätzwerten. Die Kennwerte sind separat für die $n_{cal} = 600$ Kalibrierteile sowie die $n_{val} = 200$ Validierteile errechnet. Mit Ausnahme des Korrelationskoeffizienten sind alle Kennwerte absolut (in mm) sowie relativ (in %) in Bezug auf den sechsfachen Wert der Standardabweichung σ_B (siehe Kapitel 5.1, $6 \cdot \sigma_B = 1,2$ mm) angegeben.

Kennwert	Kalibrierstichprobe		Validierstichprobe	
	absolut (mm)	relativ (%)	absolut (mm)	relativ (%)
Mittelwert \bar{e}	$2,0 \cdot 10^{-14}$	$1,6 \cdot 10^{-12}$	-0,0003	-0,021
Standardabweichung s_e	0,0014	0,113	0,0016	0,130
Mittlerer Fehler $ \bar{e} $	0,0010	0,086	0,0011	0,093
Maximalfehler $ e_i _{max}$	0,0046	0,385	0,0104	0,868
Korrelationskoeffizient r	0,99998		0,99997	

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich

- meine Bachelorarbeit ohne fremde Hilfe angefertigt habe,
- die Übernahme wörtlicher Zitate aus der Literatur sowie die Verwendung von Gedanken anderer Autoren an den entsprechenden Stellen innerhalb der Arbeit gekennzeichnet habe und
- meine Bachelorarbeit bei keiner anderen Prüfungsstelle vorgelegt habe.

Ich bin mir bewusst, dass eine falsche Erklärung zum Nichtbestehen der Bachelorarbeit führt.

Lebach, 31. Juli 2013

Ort, Datum

Unterschrift (Matthias David Heinrich)